P1

إعداد :
ذ: عشاق عبد الرحمان
ثانوية الذهب التأهيلية

تصحيح بكالوريا
مادة الرياضيات 2012 الدورة العادية.

<u>التمرين الأول</u> : الفضاء منسوب إلى م.م.م مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لدينا النقط : $A(1;1;-1)$ و $B(0;1;-2)$ و $C(3;2;1)$

والفلكة : $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1) نبين أن مركز (S) هو $\Omega(1;0;1)$ وشعاعها هو $\sqrt{3}$.

$$(S) \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-1)^2-1-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\sqrt{3}^2$$

إذن المركز هو $\Omega(1;0;1)$ و الشعاع هو $\sqrt{3}$.

2) أ- نبين أن : $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

نعلم أن :

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

حيث $\vec{AB}(-1;0;-1)$ و $\vec{AC}(2;1;2)$

إذن :

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}}_{=0}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}-\vec{k}$$

* نتحقق من أن : $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

نعلم أن : $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC) .

إذن معادلة (ABC) هي على شكل :

$$(ABC) : x-z+d=0$$

و $A\in(ABC)$ إذن إحداثياتها تحقق المعادلة (ABC) :

$$1+1+d=0 \Rightarrow d=-2$$

إذن :

$$(ABC) : x-z-2=0$$

ب- نتحقق من أن : $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{2}$

نعلم أن :

$$d(\Omega;(ABC))=\frac{|1-1-2|}{\|\vec{i}-\vec{k}\|}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

- بما أن : $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{2}<\sqrt{3}$ شعاع (S) فإن (ABC) يقطع (S)

وفق دائرة (Γ) شعاعها : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3-2}=1$

3 - (Δ) هو المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC).

أ - نبين أن $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ تمثيل بارامتري لـ (Δ) ،

نعلم أن منظمية (ABC) موجهة لـ (Δ) إذن $\vec{i} - \vec{k}$ موجهة لـ (Δ)

الذي يمر من Ω ، إذن تمثيله البارامتري هو: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

ب - ليكن $(x; y; z)$ مثلوث إحداثيات H تقاطع (Δ) و (ABC).

لدينا x و y و z تحقق كلا من معادلتي (Δ) و (ABC) أي يوجد t من $\mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ و $(1+t) - (1-t) - 2 = 0$ إذن $t = 1$

و بالتالي: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أي $H(2; 0; 0)$

ج - بما أن H هو المسقط العمودي لـ Ω على (ABC) فإن H هو مركز (Γ) دائرة تقاطع (S) و (ABC).

التمرين الثاني:

1 - نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 12z + 61 = 0$

ليكن Δ' المميز المختصر للمعادلة: $\Delta' = 36 - 61 = -25 = (5i)^2$

المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z_1 = 6 - 5i$ و $z_2 = 6 + 5i$

إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{z_1 ; z_2\}$

2 - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

نعتبر النقط: $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث: $a = 6 - 5i$

و $b = 4 - 2i$; $c = 2 + i$

أ - نحسب: $\frac{a-c}{b-c}$: لدينا:

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}$$
$$= \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$$

إذن: $Aff(\vec{AC}) = 2\,Aff(\vec{BC})$ و بالتالي $\vec{AC} = 2\vec{BC}$

يعني أن النقط A ; B ; C مستقيمية.

ب - T هي الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث $Aff(\vec{u}) = 1 + 5i$

نعتبر نقطة D حيث: $T(C) = D$ و $D(d)$. لنحدد d :

نعلم أن: $T(C) = D \iff d = c + Aff(\vec{u})$

$\iff d = 2 + i + 1 + 5i \iff d = 3 + 6i$

ج - نبين أن : $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ و أن $Arg(-1+i) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

نعلم : $\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{13}$

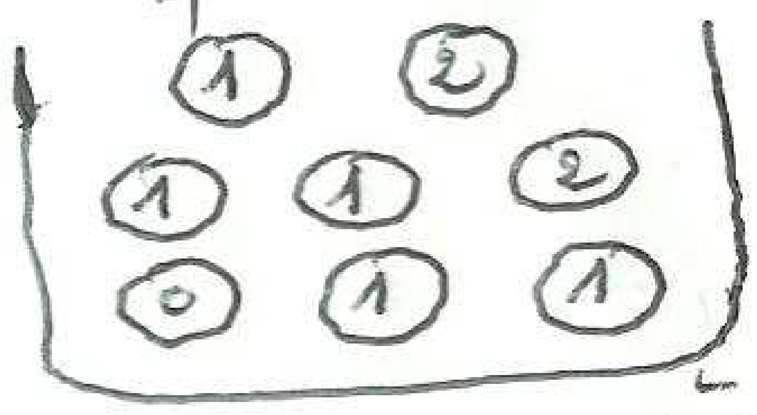
إذن : $\frac{d-c}{b-c} = \frac{2+3i+10i-15}{13} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i$

ولدينا :

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{3}\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$
$$\Longrightarrow Arg(-1+i) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

د - نعلم أن :

$$\overline{(\vec{CB};\vec{CD})} \equiv Arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$



<u>التمرين الثالث</u> : نعتبر الكيس

نسحب في <u>آن واحد</u> ثلاث بيدقات

1) حساب : $P(A)$ حيث A الحدث : "الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى".

لدينا : $card\,\Omega = C_8^3$ حيث Ω كون الامكانيات.

و $card\,A = C_5^1 C_2^1 C_1^1$

إذن : $P(A) = \frac{C_5^1 C_2^1 C_1^1}{C_8^3} = \frac{5\times2\times1}{\frac{A_8^3}{3!}} = \frac{10}{\frac{8\times7\times6}{6}} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

2) حساب $P(B)$ حيث B الحدث : "مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات يساوي 5"

$$P(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega} = \frac{C_2^2 C_5^1}{56} = \frac{1\times5}{56} = \frac{5}{56}$$

(B يتكون من "بيدقتين تحملان رقم 2 والثالثة تحمل رقم 1").

3) حساب $P(C)$ حيث C الحدث : "مجموع الاعداد يساوي 4"

إذن C يتكون من "بيدقتين تحملان رقم 2 والاخرى تحمل 0" أو "بيدقتان تحملان رقم 1 و الثالثة تحمل رقم 2" : إذن :

$$P(C) = \frac{card\,C}{card\,\Omega} = \frac{C_2^2 C_1^1 + C_5^2 C_2^1}{56} = \frac{1\times1+10\times2}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

التمرين الرابع: (U_n) متتالية عددية معرفة بـ:
$$\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) نتحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

لدينا: لكل n من $\mathbb{N}$:
$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12$$
$$= \frac{10}{11}U_n + \frac{12 - 132}{11}$$
$$= \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11}$$
$$= \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

2) أ- نبين بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < 12$

من أجل $n=0$ لدينا: $U_0 = 11 < 12$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $U_n < 12$ من أجل $n \geq 0$

لنبين أن: $U_{n+1} < 12$

لدينا حسب 1) $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

وحسب افتراض التراجع لدينا $U_n - 12 < 0$ إذن $U_{n+1} - 12 < 0$ إذن $0 > 12 - U_{n+1}$

أي $U_{n+1} < 12$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < 12$

ب- نبين أن (U_n) تزايدية قطعاً.

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n$$
$$= \frac{-U_n}{11} + \frac{12}{11} = \frac{12 - U_n}{11} > 0$$

إذن (U_n) تزايدية قطعاً

ج- لدينا من خلال أ و ب المتتالية (U_n) مكبورة و تزايدية إذن فهي متقاربة.

3) أ- لتكن (V_n) متتالية بحيث: $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_n - 12$

نبين أن (V_n) هندسية: لدينا حسب 1) $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

أي: $V_{n+1} = \frac{10}{11}V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ إذن (V_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$

وحسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول $V_0 = -1$

فإن: $V_n = V_0 q^n$ أي $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$

P5

ب - نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n = 12 + V_n$ و $V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$

$= 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

وبما أن: $0 < \frac{10}{11} < 1$ فإن $\lim \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$

إذن: $\lim U_n = 12$

التمرين الخامس: I) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln x$

1) لدينا:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	0 −	0 +	

و

x	0	1	$+\infty$
$2x^2\ln x$	‖ −	0 +	

إذن: x^2-1 و $2x^2\ln x$ سالبين على $]0;1[$.

إذن $\forall x \in]0;1[\ g(x) \leq 0$ ($g(x)$ مجموع تعبيرين سالبين على $]0;1[$).

2) كذلك على المجال $[1;+\infty[$: $x^2-1 \geq 0$ و $2x^2\ln x \geq 0$ إذن $g(x) \geq 0$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2-1)\ln x$

(C) المنحنى الممثل لـ f في معلم م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة 3cm.

1) أ - نبين أن: $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to 0^+}(x^2-1) = -1$ و $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($x > 0$)

إذن: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

التأويل المبياني: المستقيم ذو المعادلة: $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $y \to +\infty$.

ب - حساب: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$: لدينا: $\lim_{x \to +\infty} (x^2-1) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ إتجاهه محور الأراتيب.

2) أ - نبين أن: $\forall x \in]0;+\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[: \quad f'(x) = (x^2-1)' \ln x + (x^2-1) \ln' x$

$$= 2x \ln x + \frac{x^2-1}{x}$$

$$= \frac{2x^2 \ln x + x^2 - 1}{x}$$

$$= \frac{g(x)}{x}$$

و $f'(1)=0$ يعني أن (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $A(1;0)$

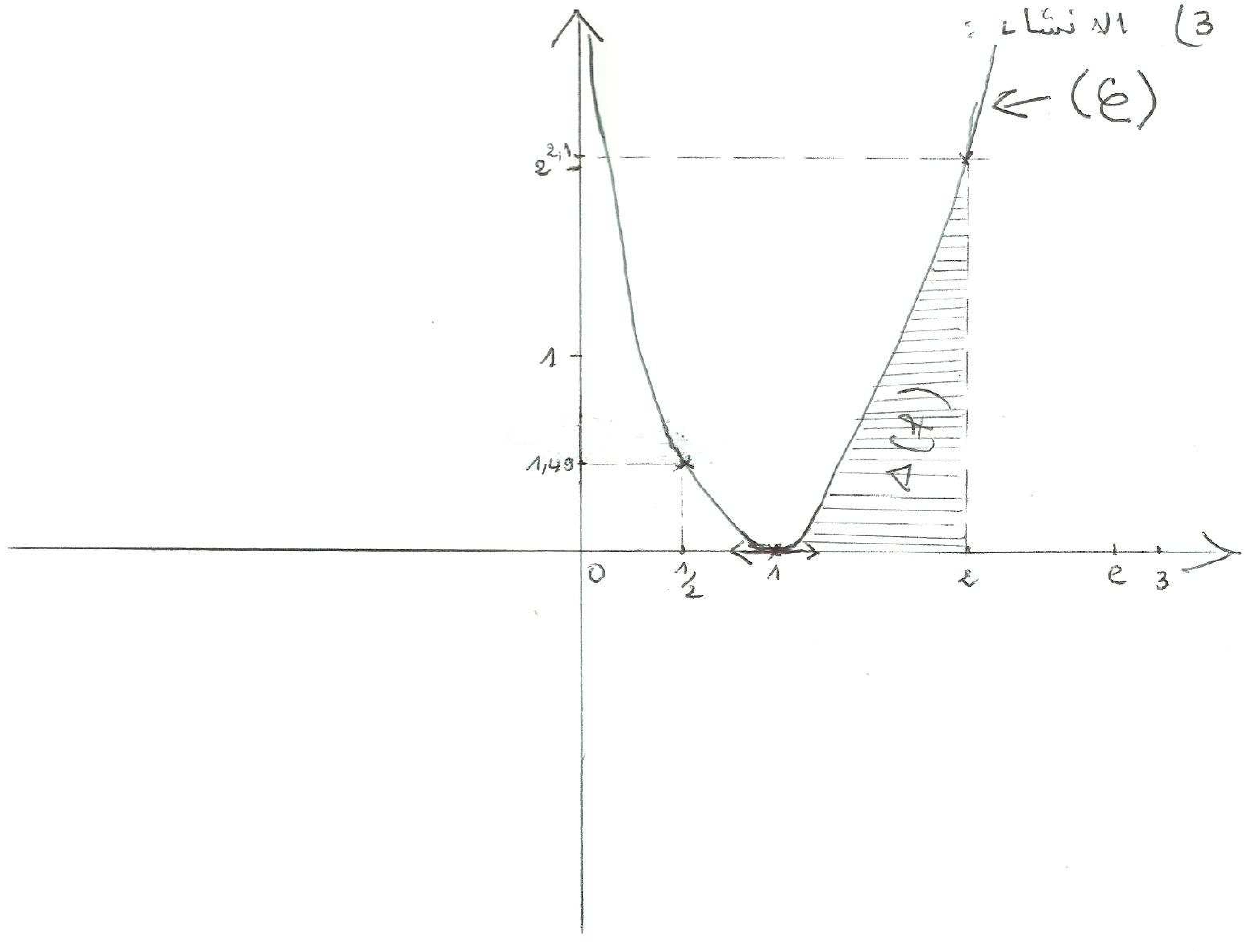
ب - حسب 1 أ و 2 من ج I) لدينا: $g<0$ على $]0;1[$ إذن
f تناقصية على $]0;1[$ (إشارة f' هي إشارة g) -
و $g \geq 0$ على $[1;+\infty[$ إذن f تزايدية على $[1;+\infty[$.

ج - جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال الجدول لدينا 0 هي القيمة الدنوية لـ f على $]0;+\infty[$
إذن: $\forall x \in]0;+\infty[: \quad f(x) \geq 0$

3) الإنشاء:



4) أ - نبين أن $u : x \to \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية لـ $x \to x^2-1$ على $\mathbb{R}$

لدينا: u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية، و

$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad u'(x) = x^2 - 1$

إذن u هي دالة أصلية للدالة $x \to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

ب -

$$\int_1^2 (x^2-1)\ln x \, dx = \int_1^2 u'(x) \ln x \, dx$$

$$= [u(x)\ln x]_1^2 - \int_1^2 u(x) \ln' x \, dx$$

$$= [u(x)\ln x]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{\frac{x^3}{3}-x}{x}\right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}-1\right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2 - \left(\frac{8}{9}-2-\frac{1}{9}+1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{8-18-1+9}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\left(1+3\ln 2\right)$$

ج - مساحة الحيز بـ cm^2 :

لدينا $f \geq 0$ على $[1;2]$ إذن:

$$\mathcal{A}(f) = \int_1^2 f(x)\,dx \times \text{وحدة}$$

$$= \frac{2}{9}\left(1+3\ln 2\right) \times 9\,cm^2$$

$$= 2\left(1+3\ln 2\right) cm^2 .$$