الدوال الأسية

أهداف الدرس

➢ التمكن من الدالة الأسية النبيرية ➢ معرفة النهايات الأساسية للدالة الأسية النبيرية ➢ التمكن من دراسة الدالة الأسية النبيرية ➢ التعرف على الدالة الأسية للأساس a ➢ التمكن من تقنيات الحساب المرتبطة بالدوال الأسية	➢ توظيف الخاصيات الجبرية للدوال الأسية في حل معادلات و متراجحات و نظمات ➢ توظيف الدوال الأسية في مواد أخرى. ➢ توظيف الدوال الأسية في الحياة اليومية

القدرات المنتظرة

- التمكن من حل معادلات و متراجحات و نظمات أسية نبيرية.
- التمكن من النهايات الأساسية للدوال الأسية و توظيفها.
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على دوال أسية و دوال لوغاريتمية .
- تحديد قيم مقربة للعدد e^a أو للعدد a علما قيمة e^a بأداة معلوماتية

الامتدادات

❖ الحساب التكاملي ❖ الفيزياء و الكيمياء ❖ الإحصاء و الاحتمالات	❖ علوم الحياة و الأرض ❖ العلوم الاقتصادية ❖ الحسابيات

فقرات الدرس

- الدالة الأسية النبيرية
- نهايات اعتيادية
- مشتقة الدالة الأسية النبيرية
- الدالة الأسية للأساس a

I)- الدالة الأسية النبيرية Fonction exponentielle népérienne

الدالة ln متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ و $ln(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

إذن الدالة ln تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$.

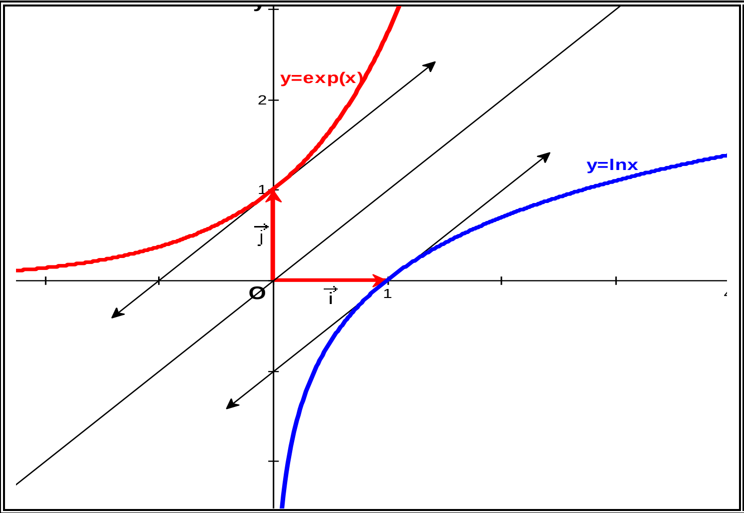
تعريف

الدالة العكسية للدالة ln تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها مؤقتا بالرمز exp

نتائج

- $exp(0)=1$ و $exp(1)=e$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x)>0$
- $(\forall x \in \mathbb{R}),(\forall y \in]0,+\infty[),(exp(x)=y \Leftrightarrow ln\,y=x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, ln(exp(x))=x$ و $\forall x \in]0,+\infty[, exp(ln\,x)=x$.
- الدالة exp متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- $exp(x)<exp(y) \Leftrightarrow x<y$ و $exp(x)=exp(y) \Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$.

منحنى الدالة exp



في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$، منحنى الدالة الأسية النبيرية هو مماثل منحنى دالة اللوغاريتم النبيري بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

خاصيات

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$exp(x+y)=exp(x).exp(y)$	$exp(x-y)=\dfrac{exp(x)}{exp(y)}$
$exp(-x)=\dfrac{1}{exp(x)}$	$exp(rx)=(exp(x))^r$

برهان

- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x' \in]0,+\infty[/ x=ln\,x'$ و $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists y' \in]0,+\infty[/ y=ln\,y'$

و منه $exp(x+y)=exp(ln\,x'+ln\,y')=exp(ln(x'y'))=x'y'=exp(x).exp(y)$

- $1=exp(x-x)=exp(x)exp(-x)$ و منه $exp(-x)=\dfrac{1}{exp(x)}$
- $\dfrac{exp(x)}{exp(y)}=exp(x).exp(-y)=exp(x-y)$.

➢ $\begin{cases} y>0 \\ (\exp(x))^r = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ \exp(x) = y^{\frac{1}{r}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ x = \ln\left(y^{\frac{1}{r}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ rx = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \exp(rx) = y$.

كتابة جديدة للدالة exp

لدينا : $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ و من أجل $x=1$ نحصل على $\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$.

نمدد هذه الكتابة إلى $\mathbb{R}$ و نكتب : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$.

ملاحظة

الخاصيات السابقة تكتب كما يلي :

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$، لدينا :

➢ $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall x \in]0,+\infty[), e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x$	➢ $e^{x+y} = e^x e^y$
➢ $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ و $\forall x \in]0,+\infty[, e^{\ln x} = x$	➢ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
➢ $\forall x,y \in \mathbb{R}, e^x < e^y \Leftrightarrow x<y$.	➢ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
➢ $\forall x,y \in \mathbb{R}, e^x = e^y \Leftrightarrow x=y$.	➢ $e^{rx} = (e^x)^r$
➢ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0,+\infty[, e^x \geq y \Leftrightarrow x \geq \ln y$	

تمرين01

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1- $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

2- $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$.

3- $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

4- $e^{2x} - 2e^x = 0$.

تمرين02

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات:

1- $e^{2x} - 2e^x \geq 0$

2- $e^{-3-x}e^{1+2x} > \frac{1}{e^x}$.

2) $(\ln x)^2 - 2\ln x \leq 0$

3- $e^x < e^{\frac{1}{x}}$

II)- نهايات اعتيادية

خاصية1

1- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

3- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

4- $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$

برهان

1)- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

2)- لدينا $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

3)- نضع $t = e^x$ إذن $x = \ln t$ و لدينا $(x\to+\infty) \Leftrightarrow (t\to+\infty)$ و منه $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t} = +\infty$.

4)- بنفس الطريقة: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to0^+} t\ln t = 0^-$.

أمثلة

أحسب النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^{x}}{1+e^{x}}$ ، $\lim\limits_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}$.

خاصية2

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : 1)- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ 2)- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=0$

برهان

1)- نضع $t=\frac{x}{n}$ إذن $x=nt$ و لدينا $(x\to-\infty)\Leftrightarrow(t\to-\infty)$

و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{x}{n}}\right)^{n}=n^{n}\lim\limits_{t\to-\infty}\left(te^{t}\right)^{n}=0$.

2)- نضع $t=\frac{x}{n}$ إذن $x=nt$ و لدينا $(x\to+\infty)\Leftrightarrow(t\to+\infty)$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^{n}=\frac{1}{n^{n}}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)^{n}=0$.

III)- مشتقة الدالة $x\mapsto e^{x}$

خاصية

الدالة $x\mapsto e^{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R},\left(e^{x}\right)'=e^{x}$

برهان

الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة لا تنعدم على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $x\mapsto e^{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R},\left(e^{x}\right)'=\frac{1}{\ln'\left(e^{x}\right)}=e^{x}$.

أمثلة

أحسب $f'(x)$ على المجال I في الحالات التالية:

1)- $I=\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2-3x}$ 2)- $I=]0,+\infty[, f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$

3)- $I=\mathbb{R}, f(x)=x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ 3)- $I=]1,+\infty[, f(x)=\ln\left(e^{x}-e\right)$

نتائج

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=0$.
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لديها : $\forall x\in I,\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$.
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I هي الدوال : $x\mapsto e^{u(x)}+\lambda,(\lambda\in\mathbb{R})$.

مسألة (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2x$.

1 — 1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$.

0,75 — 2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من IR (لاحظ أن $g(0)=1$).

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0,5 — 1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

0,25 — ب- تحقق من أن $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من IR^*.

0,5 — ج- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$).

0,25 — د- استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $-\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

0,75 — 2) أ- لكل x من $[0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$ وأن $2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$.

0,5 — ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$) .

0,5 — ج- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0,75 — د- بين أن : $f(x)-2x\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ واستنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $[0,+\infty[$.

0,75 — 3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$ لكل x من IR .

0,5 — ب- ادرس إشارة $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

1 — 4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف) .

تمرين

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$.

1)- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- أدرس تغيرات الدالة f ثم اعط جدول تغيراتها.

3)- أدرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f.

4)- أنشئ منحنى الدالة f.

5)- حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

IV)- الدالة الأسية للأساس a ($a>0$ و $a\neq 1$) Fonction exponentielle de base a

الدالة log_a متصلة و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$.

تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و يخالف 1.
الدالة الأسية للأساس a هي الدالة العكسية للدالة log_a ونرمز لها بالرمز : exp_a

نتائج

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0,+\infty[, exp_a(x)=y \Leftrightarrow x = log_a y$.
- $exp_a(x)=y \Leftrightarrow x = log_a y \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x\ln a \Leftrightarrow y = e^{x\ln a}$

و منه : $\forall x \in \mathbb{R}, exp_a x = e^{x\ln a}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, exp_a(x)=exp_a(y) \Leftrightarrow x=y$.

خاصيات

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل عدد حقيقي موجبا قطعا a و يخالف 1 لدينا:

$exp_a(x+y)=exp_a(x)exp_a(y)$ ؛ $exp_a(-x)=\dfrac{1}{exp_a(x)}$.

$exp_a(x-y)=\dfrac{exp_a(x)}{exp_a(-y)}$ ؛ $\forall r \in \mathbb{Q}, exp_a(rx)=(exp_a(x))^r$

$exp_a 0 = 1$ و $exp_a 1 = a$

كتابة جديدة للدالة exp_a

لدينا : $exp_a(rx)=(exp_a(x))^r$ و من أجل $x=1$ نحصل على $exp_a(r)=(exp_a(1))^r=a^r$.
نمدد هذه الكتابة إلى $\mathbb{R}$ و نكتب : $\forall x \in \mathbb{R}, exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$.

ملاحظة

- الدالة $x \mapsto e^x$ هي الدالة الأسية للأساس e.
- الدالة $x \mapsto 10^x$ هي الدالة الأسية للأساس 10.

مشتقة الدالة $x \mapsto a^x$

خاصية

الدالة $x \mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = \ln a . a^x$

برهان

$\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a (e^{x\ln}) = \ln a . a^x$.

نتيجة

- إذا كان $0<a<1$ فإن : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- إذا كان $a>1$ فإن : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

أمثلة

1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ)- $2^{x+1}=16$ ب)- $3^x=6$ ج)- $10^{2x}-14\times10^x+40=0$.

2)- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

أ)- $2^{x-1}<4^{2x}$ ب)- $3^x>2$ ج)- $3^x-3^{2-x}-8>0$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=4^x-2^x$.

1)- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f.

3)- أ- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

ج- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.