Centre de formation des Inspecteurs-Rabat
Bac Sc. Mathématiques 2012-2013

Proposé par : Ahmed SANI [1]
email : ahmedsani82@gmail.com
à telecharger sur :http ://$www.riyadiyat.net/2bsm/examens_nationaux/2bsm_juin_2013$

Nous proposons un corrigé sommaire de l'épreuve en traitant les exercices dans l'ordre $o\grave{u}$ il nous semble plus "pédagogique". Nous terminons par une r$\acute{e}$flexion didactique sur l'épreuve.

Exercice 1 (Arithmétique).

Soit $n \in \mathbb{N}$ sup$\acute{e}$rieur strictement $\grave{a}$ 1. On désignera par p le plus petit nombre premier positif divisant n.

1.a L'identité $3^n - 2^n \equiv 0[n]$ équivaut $\grave{a}$ dire que n divise $3^n - 2^n$, c'est $\grave{a}$ dire $3^n - 2^n = kn$ pour un certain entier k. Mais p divise n donc $n = mp$, $o\grave{u}$ m est également un entier. Il s'ensuit que : $3^n - 2^n = kmp$ soit $3^n - 2^n = \lambda p$ avec $\lambda(= km)$ un nombre entier naturel. D'$o\grave{u}$, $3^n - 2^n \equiv 0[p]$.
D'autre part, $3^n - 2^n$ est clairement un nombre impair, donc $p \neq 2$; et ne peut $\hat{e}$tre divisible par 3 car sinon 3 diviserait 2^n, donc forcément $p \geq 5$.

1.b Il suffit de remarquer que p étant premier superieur $\grave{a}$ 5, les nombres 2 et p sont premiers entre eux et utiliser le petit théor$\grave{e}$me de Fermat pour conclure que $2^{p-1} = 1[p]$. Le m$\hat{e}$me raisonnement est valable l'identit$\acute{e}$ pour $3^{p-1} = 1[p]$.

1.c Un diviseur commun $\grave{a}$ n et p-1 différent de 1 admet lui m$\hat{e}$me un plus petit diviseur effectif que nous noterons d. D'aprés le cours, d est premier et vérifie :

- $d \leq p-1$ par suite $d \prec p$.
- •• $p \prec d$ par définition de p en tant que plus petit nombre premier divisant n.

Cet absurde permet de conclure que $(p-1) \wedge n = 1$. Le théor$\grave{e}$me de Bezout garantit l'existence d'un couple (a ;b) d'entiers que l'on peut choisir naturels tel que [2] :

$$\boxed{an - b(p-1) = 1} \tag{1}$$

1.d La division de a par $p-1$ donne l'existence d'un couple d'entiers $(q;r)$ tel que :

$$\text{Division euclidienne}(de\ a\ par\ p-1)\begin{cases} \bullet 0 \leq r \prec p-1 \ \ avec \text{ r } \acute{e}\text{ventuellement nul .} \\ \bullet\bullet\ a = q(p-1) + r.\ (\odot) \end{cases}$$

Le cas $r = 0$ est $\grave{a}$ exclure car cela aboutirait $\grave{a}$: $1 = h(p-1)\ avec\ h \in \mathbb{N}$ c-$\grave{a}$-d $p-1$ divise et donc est $\acute{e}$gal a 1. Ce qui est impossible car $p \geq 5$.

En multipliant les membres de $(\odot)$ par n, on obtient : $an = qn(p-1) + rn$, soit $rn = an - qn(p-1)$. Mais d'apr$\acute{e}$s (1) $an = b(p-1) + 1$ donc $rn = \omega(p-1) + 1$, $o\grave{u}$: $\omega = b - qn$. Le caract$\grave{e}$re naturel de ω est évident car il est entier comme différence de deux entiers et est positif comme rapport de nombres trivialement positifs ($\omega = \frac{rn-1}{p-1}$)

---

1. Mes remerciements $\grave{a}$ Monsieur Ajana et monsieur Hajmi pour leur help
2. Cette égalité fera objet d'une brève discussion au terme de l'analyse didactique

2 Soit n un entier naturel vérifiant $3^n - 2^n \equiv 0[n]$. Alors

$$3^n - 2^n \equiv 0[n] \Longrightarrow (3^n)^r - (2^n)^r \equiv 0[n] \ \ (Et\ ce\ \forall r \in \mathbb{N})$$
$$3^n - 2^n \equiv 0[n] \Longrightarrow (3^n)^r - (2^n)^r \equiv 0[p] \ où\ p\ est\ le\ diviseur\ de\ n\ \ défini\ comme\ ci-haut$$
$$3^n - 2^n \equiv 0[n] \Longrightarrow (3)^{nr} - (2)^{nr} \equiv 0[p]$$
$$3^n - 2^n \equiv 0[n] \Longrightarrow 3^{1+\omega(p-1)} - 2^{1+\omega(p-1)} \equiv 0[p]$$
$$3^n - 2^n \equiv 0[n] \Longrightarrow 3 \equiv 2[p] \tag{2}$$

La dernière identité (2) provient immédiatement de la question 1.b et affirme que le nombre premier p est un diviseur de l'unité. Ceci suffit pour affirmer l'irrésolubilité de l'équation en n :

$$3^n - 2^n \equiv 0[n]$$

dés que $n \geq 1$.[Vérification $\grave{a}$ la main pour n=1 et l'exercice propose une preuve dans le cas $n > 1$]

Exercice 2 (Structures algébriques)

1.a **Commutativité et assciativité**
la loi $*$ est trivialement commutative. Cela provient de la commutativité de de l'addition dans $\mathbb{Z}$
Pour l'associativité, ce simple calcul est suffisant car l'addition est associative et commutative dans $\mathbb{Z}$: $\forall (x; y; z) \in \mathbb{Z}^3$:

$$(x * y) * z = (x + y - 2) * z = (x + y - 2) + z - 2 = x = y + z - 4$$

D'autre part :

$$x * (y * z) = x * (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4$$

1.b **Elément neutre** Si e est l'élément[3] neutre pour $*$ alors, alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a * e = e * a = a$$

Equation équivalente $\grave{a}$:

$$a + e - 2 = a$$

Par suite $*$ admet bien 2 comme élément neutre.

1.c **Symétrisabilité** Soit $a \in \mathbb{Z}$. b est ***le*** symétrique de a signifie : $a * b = 2$ c'est $\grave{a}$ dire que $a + b - 2 = 2$, autrement dit : $b = 4 - a$. L'unicité de b est assurée par le cours car la loi $*$ est associative.
Structure de $(\mathbb{Z}; *)$: Comme $*$ est une loi interne associative, admet un élément neutre et tout élément est symétrisable, alors $(\mathbb{Z}; *)$ est un groupe. Ce groupe est commutatif car $*$ l'est, d'aprés la question 1.a

2.a **f est un isomorphisme** :D'abord, T est bien une loi de composition interne car $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$: $(xy - 2x - 2y + 6) \in \mathbb{Z}$. Ensuite, soient a et b dans $\mathbb{Z}$. Alors

$$f(a)Tf(b) = (a+2)(b+2) - 2(a+2) - 2(b+2) + 6$$
$$f(a)Tf(b) = ab + 2a + 2b + 4 - 2a - 4 - 2b - 4 + 6$$
$$f(a)Tf(b) = ab + 2$$
$$f(a)Tf(b) = f(ab)$$

Donc f est bien un homomorphisme. L'application affine $x \longrightarrow x + 2$ est trivialement bijective dont la

3. Mot bien $d\acute{e}$fini car s'il existe, il est unique.(cf page ..)

bijection est $f^{-1} : x \longrightarrow x-2$, il s'ensuit que f est un isomorphisme qui identifie $(\mathbb{Z};\times)$ $\grave{a}$ $(\mathbb{Z};T)$ (Du point de vue structure)).

2.b **Distributivité de T par rapport** $\grave{a}$ $*$: A l'instar de la question précécente, soient a, b et c dans $\mathbb{Z}$. L'on a :

$$(a*b)Tc = (a+b-2)Tc = (a+b-2)c - 2(a+b-2) - 2c + 6 = ac + bc - 2a - 2b - 2c + 10$$

Mais, on a également :

$$(aTc)*(bTc) = (aTc)+(bTc)-2 = ac-2a-2c+6+bc-2b-2c+6 = ac+bc-2a-2b-2c+10$$

La distibutivié découle des deux derni$\grave{e}$res égalités.

3. **Structure de** $(\mathbb{Z};*;T)$: puisque f est un isomorphisme, et comme la multiplication usuelle $\times$ conf$\grave{e}re$ $\grave{a}$ $(\mathbb{Z};\times)$ une strucure de mono$\ddot{i}de$[4], alors la loi T est associative, commutative et admet f(1)=3 comme élément neutre.
Résumons :
– $(\mathbb{Z};*)$ est un groupe commutatif
– T est une loi de composition interne associative
– T est distributive par rapport $\grave{a}$ la loi $*$
Il en découle que $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};*;T)$ est un anneau. puisque T est commutative, alors cet anneau est également commutatif. De plus, d'aprés 2.c, T admet un élément neutre (rappel : c'était 3), alors l'anneau $(\mathbb{Z};*;T)$ est unitaire. (unif$\grave{e}$re dans certaines littératures)

4.a **Intégrité de l'anneau** $\mathbb{A}$:Il suffit de montrer qu'il n'admet pas de diviseurs de "‘zéro". Par "‘zéro" de l'anneau $(\mathbb{Z};*;T)$, on entend bien le nombre 2 qui est l'élément neutre pour la premi$\grave{e}$re loi $*$. Soit alors $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $aTb = 0$. Alors :
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longleftrightarrow ab-2a-2b+6 = 2$
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longleftrightarrow aTb = 2a(b-2)-2b+4 = 0$
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longrightarrow aTb = 2a(b-2)-2b+4 = 0$
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longleftrightarrow a(b-2)-2(b-2) = 0$
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longleftrightarrow (a-2)(b-2) = 0$
$aTb = 0_{(\mathbb{Z};*)} \Longleftrightarrow a = 2 = 0_{(\mathbb{Z};*)}\ ou\ b = 2 = 0_{(\mathbb{Z};*)}$

4.b Le calcul de 4.a montre que l'anneau $(\mathbb{Z};*;T)$ est bien intégre.

4.c $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};*;T)$ est un anneau commutatif, unitaire et intégre. Pour qu'il soit un corps, il suffit de vérifier l'inversibilité de ses éléments "‘non nuls"', c'est $\grave{a}$ dire dans notre cas différents de 2 (qui co$\ddot{i}$ncide avec 0_A). Considérons un élément x de l'anneau $\mathbb{A}$ différent de 2. Alors, x est inversible équivaut $\grave{a}$ l'existence d'un élément y de $\mathbb{A}$ tel que : $xTy = yTx = 2$. or :

$xTy = 2 \Longleftrightarrow xy-2x-2y+6 = 3$
$xTy = 2 \Longleftrightarrow (x-2)y = 2x-3$
Le fait que cette équation soit impossible pour $x = 2$ est naturel car x est censé $\hat{e}$tre différent de $0_{\mathbb{A}}$ (qui est 2). Mais le probl$\grave{e}$me réside dans l'indivisibilité de $2x-3$ par $x-2$ pour tout entier x. Pour l'appréhender, il suffit de choisir une valeur particuli$\grave{e}$re de x ($x = -1$ convient.) ou plus subtilement écrire :

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

pour $\hat{e}$tre convaicu $\grave{a}$ partir des équivalences :

$$y\ est\ entier \Longleftrightarrow \frac{1}{x-2}\ est\ entier\ \Longleftrightarrow x-2 = \pm 1 \Longleftrightarrow x = 3\ ou\ x = 1$$

L'anneau $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};*;T)$ ne saurait donc pas $\hat{e}$tre un corps.

4. Ce terme est regrettablement omis du programme et n'a pas fait objet d'une moindre tentative de traduction. Voir Partie : analyse didactique

Exercice 3 : les nombres complexes

Partie 1

1.α. Un calcul simple aboutit *à* :
$\Delta = (-a(3+i\sqrt{3}))^2 - 8a^2(1+i\sqrt{3})$
$\Delta = (-2-2i\sqrt{3})a^2$
$\Delta = [(-1)^2 + (i\sqrt{3})^2 + 2(-1)i\sqrt{3}]a^2$
$\Delta = [(-1+i\sqrt{3})a]^2$

1.β. On calcule le discriminant de l'équation proposée et l'obtient aisément exactement la valeur de Δ obtenue *à* la question précédente. L'équation admet donc deux solutions complexes :

$$z = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(3+i\sqrt{3})a - (-1+i\sqrt{3})a}{4} = a$$

puis

$$z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(3+i\sqrt{3})a + (-1+i\sqrt{3})a}{4} = \frac{2a(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{a(1+i\sqrt{3})}{2}$$

òu δ désigne l'une quelconque des deux racines complexes de Δ.

Partie 2

1. Soient 0, A et B les trois points d'affixes respectives :0, a et $ae^{i\pi/3}$. Alors

$$OA = |a| \ ; \ OB = \left|ae^{i\pi/3}\right| = |a|$$

Examinons la distance AB :

$$AB = \left|a - ae^{i\pi/3}\right| = \left|a(1-e^{i\pi/3})\right| = \left|ae^{i\pi/6}(e^{-i\pi/6} - e^{i\pi/6})\right| = \left|2isin(\pi/6)e^{-i\pi/6}\right| = |a|$$

Ceci suffit pour affirmer que le triangle OAB est équilateral.

2.α Notons d'abord que r^{-1} est la rotation de m*ê*me centre que r et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Il s'ensuit que :
$r^{-1}(A) = A_1 \Longleftrightarrow a_1 - z = e^{-\frac{\pi}{3}}(a-z)$
$r^{-1}(A) = A_1 \Longleftrightarrow a_1 = e^{-\frac{\pi}{3}}(a-z) + z$
$r^{-1}(A) = A_1 \Longleftrightarrow a_1 = (\frac{1-i\sqrt{3}}{2})a + (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})z$
un calcul similaire aboutit *à* :
$r(B) = B_1 \Longleftrightarrow a_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}a + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z$

2.β On montre facilement que les diagonales du quadrilat*è*re OA_1MB_1 s'interceptent en leur milieu. En effet, l'on a :

$$\frac{a_1+b_1}{2} = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}a + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z}{2} = \frac{z}{2}$$

C'est *à* dire

$$\frac{z_{A_1}+z_{B_1}}{2} = \frac{z_M+z_O}{2}$$

Ce qui prouve bien que les segments $[OM]$ et $[A_1B_1]$ ont même milieu. Par suite OA_1MB_1 est un parall*è*logramme probablement aplati lorsque M co*ï*ncide avec l'un des sommets A_1, B_1 ou l'origine O. .

3.α Par définition de A_1 et B_1, l'on a :

$a_1 - z = e^{-\frac{\pi}{3}}(a-z)$ et $b_1 - z = e^{\frac{\pi}{3}}(b-z)$

par suite, puisqu'on peut diviser par $z-a_1$ et par $z-a$:

$$\frac{z-b_1}{z-a_1} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(z-b)}{e^{-\frac{\pi}{3}}(z-a)}$$

$$\frac{z-b_1}{z-a_1} = \frac{e^{\frac{2\pi}{3}}(z-b)}{z-a} = e^{\frac{2\pi}{3}}\frac{z-b}{z-a}$$

En se rappelant que :$\frac{a}{b} = \frac{a}{ae^{\frac{\pi}{3}}}$ et que -1 peut s'écrire : $-1 = e^{\pi}$, on s'aper$c_5$oit que $\frac{a}{b} = e^{-\frac{\pi}{3}}$ donc $-\frac{a}{b} = e^{\frac{2\pi}{3}}$. L'égalité demandée en découle.

3.β En utilisant la remarque et l'égalité de la question prédédente, on établit les équivalences successives suivantes :

M, A_1 *et* B_1 *sont alignés* $\Longleftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$

M, A_1 *et* B_1 *sont alignés* $\Longleftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \times \frac{a-0}{b-0} \in \mathbb{R}$

M, A_1 *et* B_1 *sont alignés* $\Longleftrightarrow \arg(\frac{z-b}{z-a}) + \arg(\frac{a-0}{b-0}) \equiv 0[\pi]$
M, A_1 *et* B_1 *sont alignés* $\Longleftrightarrow (\vec{MA};\vec{MB}) + (\vec{OA};\vec{OB}) \equiv 0[\pi]$
M, A_1 *et* B_1 *sont alignés* $\Longleftrightarrow M,\ A,\ B$ *et* O *sont cocycliques.*

Exercice 4 :Etude de fonctions.

Partie I

1.a Sous entendu, toutes ces limites sont calculées lorsque $x \longrightarrow 1$ par valeurs superieures :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x}(\frac{\ln x}{x-1})^{-1} = 1 = h(1)$$

donc h est bien continue *á* droite au point 1.

1.b Considérons la fonction : $\varphi(x) = \ln x - x + 1$. la fonction φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. De plus $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq 0$ donc φ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. comme $\varphi(1) = 0$ alors

$$x \geq 1 \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(1) \Longrightarrow \varphi(x) \leq 0$$

une méthode plus élégante consiste *à* remarquer que la fonction $x \longrightarrow \ln x$ est concave sur $[1;+\infty[$, donc sa tangente en tout point est au-dessus de sa représentation graphique. Mais la tangente au point d'abscisse 1 est exactement $y = x-1$. Ce qui permet d'établir l'inégalité sans recours au calcul. La dérivabilité de h sur $]1;+\infty[$ est évidente et l'on a $\forall x \in]1;+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{x\ln x - (x-1)(1+\ln x)}{(x\ln x)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x\ln x)^2}$$

La question précédente montre que le numérateur est négatif tandis que $(x\ln x)^2 > 0 \quad \forall x \in]1;+\infty[$. Donc $\forall x > 1$: $h'(x) < 0$ et h est alors strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Puisqu'elle est continue en 1 *à* droite, alors elle est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

2.a On rappelle que $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\ln x=+\infty$ par suite $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$. donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}h(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-1}{x\ln x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\ln x}\frac{x-1}{x}=0\times1=0$$

Tableau de variations de h :

x	1	$+\infty$
$h(x)$	$1 \searrow$	0

2.b Comme h est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, alors h définit une bijection de $]1;+\infty[$ vers son image par h, $]0;1]$.(Voir tableau de variations ou bien écrire : $h(]1;+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty}h(x);h(1)[=]0;1]$, r$\grave{e}$gle bien connue.)

Partie II.

1.a l'application $t\longrightarrow\frac{1}{t\ln t}$ est continue sur tout intervalle de la forme $[x;x^2]$ dés que $x\in]1;+\infty[$ donc la fonction $x\longrightarrow\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt$ est bien définie sur $]1;+\infty[$ .Et l'on a :

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\int_x^{x^2}\frac{(\ln t)'}{\ln t}dt=[\ln|\ln t|]_x^{x^2}=(\ln\ln x^2-\ln\ln x)=\ln(2\ln x)-\ln x=\ln2$$

1.b Un calcul direct donne pour tout x dans $]1;+\infty[$:

$$g(x)-\ln2=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt-\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt$$

$$g(x)-\ln2=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}-\frac{1}{t\ln t}dt$$

$$g(x)-\ln2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

Aprés on procéde $\grave{a}$ un changement de variable simple en posant $y=\sqrt{t}$. Ce qui donne :$dy=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Il s'ensuit que :

$$g(x)-\ln2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}2y\frac{y-1}{y^2\ln y^2}dy$$

$$g(x)-\ln2=\int_{\sqrt{x}}^{x}2y\frac{y-1}{2y\ln y}dy$$

$$g(x)-\ln2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{y-1}{y\ln y}dy$$

$$g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x} h(y)dy$$

2.a Soit $(x;t)\in[1;+\infty[^2$. Alors : $\sqrt{x}\leq t\leq x \Longrightarrow h(x)\leq h(t)\leq h(\sqrt{x})$ car $x\geq 1\Longrightarrow x\geq\sqrt{x}\geq 1$
Cela résulte de la décroissance de h sur $[1;+\infty[$.
Donc,

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} h(x)dt\leq\int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)dt\leq\int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x})dt$$

d'*où* :

$$(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

et c'est l'inégalité demandée.

2.b $\forall x>1$, le taux de variation de g entre 1 et x s'écrit : $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}$. Par suite, ce taux peut être encadré gràce *à* la double inégalité de 2.a :

$$\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(x)\leq\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\leq\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(\sqrt{x}) \tag{3}$$

En posant $u=\sqrt{x}$, le calcul des limites des membres extrêmes de l'inégalité devient trés facile[5]. En effet :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{u\to 1^+}\frac{u^2-u}{u^2-1}=\lim_{u\to 1^+}\frac{u(u-1)}{(u-1)(u+1)}=\lim_{u\to 1^+}\frac{u}{u+1}=1/2$$

D'autre part, $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}=\lim_{u\to 1^+}u=1$ et la fonction h est continue au point 1, donc $\lim_{x\to 1}h(\sqrt{x})=1$. Ainsi le théorème des limtes comparées permet de dire que : $\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$.
Autrement dit, g est dérivable *à* droite au point 1 et $g'_d(1)=1/2$.

2.c Il suffit de remarquer que $g(x)\geq(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2$ et que

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})\frac{x-1}{x\ln x}=\ln 2+\lim_{u\to+\infty}(u^2-u)\frac{(u^2-1)}{2u^2\ln u}$$

soit

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)-\ln 2=\lim_{u\to+\infty}(u(u-1))\frac{u^2(1-1/u^2)}{2u^2\ln u}=\lim_{u\to+\infty}(\frac{(u-1)(1-1/u^2)}{2})\frac{u}{\ln u}$$

Comme $\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{\ln u}=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)=+\infty$, par suite $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Pour le rapport $g(x)/x$, on réécrit la double inégalité : (3) avec certaines réadaptations :

$$\frac{x-\sqrt{x}}{x}h(x)\leq\frac{g(x)-\ln 2}{x}\leq\frac{x-\sqrt{x}}{x}h(\sqrt{x})$$

En remarquant que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}=0\ et\ que\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2-u}{u^2}=\lim\frac{u^2}{u^2}=1$$

5. Ce changement est loin d'*être* nécessaire. un calcul direct est possible

ajout*ée* *à* :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} h(\sqrt{x}) = 0$$

On trouve ais*é*ment que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0}$$

<u>Conclusion</u> : La courbede g admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses au voisinage de l'infini.

3.a L'application $t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ est manifestement continue sur $]1;+\infty[$. Donc la fonction $\phi : x \longrightarrow \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t}\ln t} dt$ est d*é*rivable . De m*ê*me $\omega : x \longrightarrow x$ et $\psi : x \longrightarrow x^2$ sont d*é*rivables sur $]1;+\infty[$, donc g est aussi d*é*rivable sur $]1;+\infty[$ comme compos*ée* de fonctions d*é*rivables sur ledit intervalle. En effet g s'*é*crit : $g = \phi \circ \psi(x) - \phi \circ \omega(x)$. De plus, on a :

$$g'(x) = \psi'(x)\phi' \circ \psi(x) - \omega'(x)\phi' \circ \omega(x) = 2x\frac{1}{x\ln x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2\ln\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$$

finalement :

$$\boxed{g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})}$$

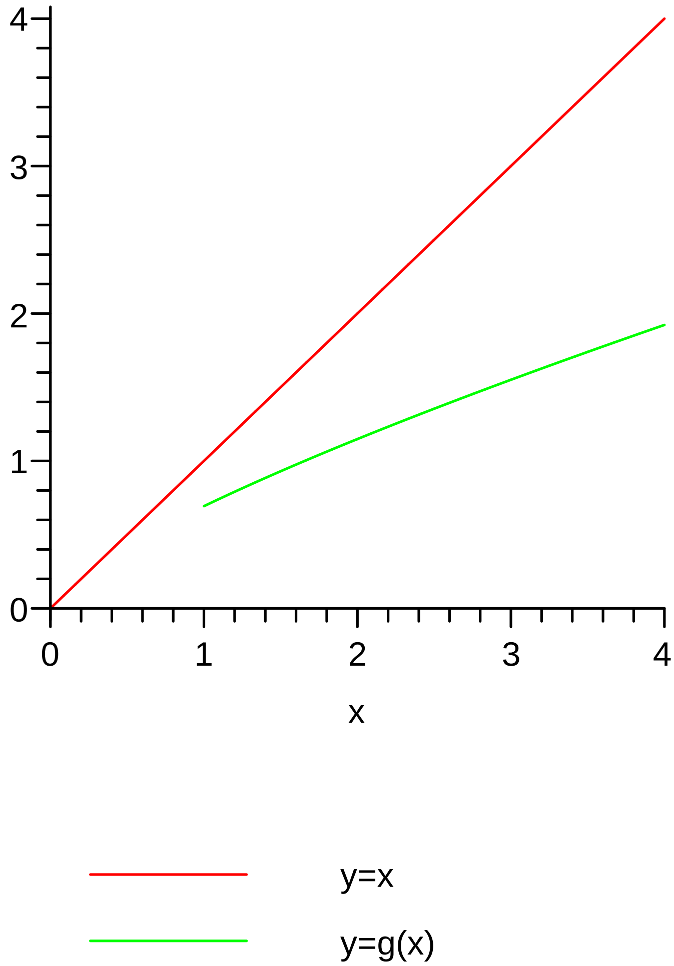
3.b D'apr*é*s (4), g' est positive sur $]1;+\infty[$ car :$\forall x > 1 : \sqrt{x} > 1$ et h est positive sur $]1;+\infty[$. Par suite g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Mais g est continue *à* droite au point 1 car elle y est d*é*rivable *à* droite en 1, donc g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Voici un tableau r*é*capitulatif des variations de g :

tableau de variation de g

x	**1**	$+\infty$
g(x)	**Ln2** $\nearrow$	$+\infty$

3.c *Courbe représentative de g :*[6]

6. Cette courbe a *été* réalis*ée* *à* l'aide de Maple. Trouver ci-joint la proc*é*dure.



Partie III

I.1 l'application k :$x \longrightarrow g(x)-x+1$ est d$\acute{e}$rivable sur $I=]1;+\infty[$ comme somme des deux fonctions d$\acute{e}$rivables sur I (i.e g et l'application affine : $x \longrightarrow -x+1$.)
et l'on a : $k'(x)=g'(x)-1$. Mais $g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$ donc $\forall x>1:\ 0\leq g'(x)\leq 1/2$. (in$\acute{e}$galit$\acute{e}$ vraie aussi pour $x=1$). Il s'ensuit que $\forall x\geq 1:\ -1\leq g'(x)\leq -1/2$. On peut donc conclure que k est strictement d$\acute{e}$croissante sur $I=[1;+\infty[$.
R$\acute{e}$capitulons : k est une fonction continue et strictement monotone sur $I=[1;+\infty[$ donc elle d$\acute{e}$finit une bijection de I vers J tel que $J=k(I)=]\lim_{x\to+\infty}k(x);k(1)]=]-\infty;\ln 2]$. En effet : d'apr$\acute{e}$s 1.c de la partie II, $g(x)-x-\ln 2\leq(x-\sqrt{x})h(x)-x$ donc

$$k(x)=g(x)-x+1\leq(x-\sqrt{x})h(x)-x+\ln 2+1\leq x[h(x)-\frac{h(x)}{\sqrt{x}}-1+\frac{1+\ln 2}{x}]$$

Le membre de droite tend vers $-\infty$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$. Ce qui justifie les bornes de l'intervalle J.

I.2 k est une fonction continue sur l'intervalle I et $0\in J=k(I)$. Le th$\acute{e}$or$e$me des valeurs interm$\acute{e}$diaires garantit l'existence d'au moins un nombre α dans I tel que $k(\alpha)=0$. Comme k est bijective (donc injective) d'apr$\acute{e}$s la question pr$\acute{e}$c$\acute{e}$dente, alors α est unique.
$k(\alpha)=0 \Longleftrightarrow g(\alpha)-\alpha+1=0 \Longleftrightarrow g(\alpha)=\alpha-1$

II.1.a Soit la propriété P(n) : $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq u_n < \alpha$

- *Initialisation* :P(0) est vérifiée selon la définition de u_0
- *Hérédité* : Supposons P(n) vérifiée et montrons qu'il en est de même pour P(n+1).

$$P(n) \Longrightarrow 1 \leq u_n < \alpha$$
$$P(n) \Longrightarrow g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha) \ \ (car\ g\ est\ croissante)$$
$$P(n) \Longrightarrow \ln 2 \leq g(u_n) < g(\alpha)$$
$$P(n) \Longrightarrow 1 + \ln 2 \leq 1 + g(u_n) < 1 + g(\alpha)$$

$$\boxed{P(n) \Longrightarrow 1 < 1 + \ln 2 \leq u_{n+1} < \alpha \ \ car\ 1 + g(\alpha) = \alpha}$$

II.1.b La monotonie de $(u_n)_n$ s'obtient comme d'habitude en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ qui vaut : $u_{n+1} - u_n = 1 + g(u_n) - u_n = k(u_n)$. Or $u_n < \alpha$ et k est décroissante sur I donc $k(u_n) > k(\alpha)$ autrement dit $k(u_n) > 0$ par définition de α. Ceci prouve que $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

II.1.c On utilise le critère usuel de convergence : Toute suite croissante et majorée est convergente. C'est le cas ici puisque, d'une part $u_n < \alpha$, d'autre part $(u_n)_n$ est croissante d'aprés la question précédente. Notons l la limite de la suite $(u_n)_n$.
Comme l'application k est continue sur $I = [1; +\infty[$ et $k(u_n)$ est bien définie pour tout entier n tout en vérifiant $\otimes$: $u_{n+1} - u_n = k(u_n)$ alors par passage à la limite dans $\otimes$, on obtient : $l - l = k(l)$ c-à-d $k(l) = 0$ avec $l \in I$. Mais l'unique solution de l'équation $k(x) = 0$ dans I est α, par suite : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

II.2.a Nous rappelons que $\forall x > 1\ k'(x) = g'(x) - 1$ et comme $0 \leq g'(x) \leq 1/2$ alors $-1 \leq k'(x) \leq -\frac{1}{2}$. D'autre part, k étant continue sur tout intervalle de la forme $[u_n; \alpha]$, dérivable sur $]u_n; \alpha[$, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'au moins un nombre θ_n dans $]u_n; \alpha[$ tel que :

$$k(u_n) = k(u_n) - k(\alpha) = k'(\theta_n)(u_n - \alpha)$$

Il suffit maintenant de remarquer que :

$u_{n+1} - u_n = k(u_n) \Longrightarrow u_{n+1} - \alpha - (u_n - \alpha) = k(u_n) - k(\alpha)$
soit : $u_{n+1} - u_n = k(u_n) \Longrightarrow u_{n+1} - \alpha = k'(\theta_n)(u_n - \alpha) + u_n - \alpha$
$u_{n+1} - u_n = k(u_n) \Longrightarrow u_{n+1} - \alpha = (k'(\theta_n) + 1)(u_n - \alpha)$

Mais $\forall x > 1 :\ -1 \leq k'(x) \leq -\frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq k'(\theta_n) + 1 \leq \frac{1}{2}$ (*i.e* $\left|k'(\theta_n) + 1\right| \leq 1/2$) donc

$$\boxed{\forall n \in N :\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$

II.2.b Notons $Q(n)$ la propriété : $\forall n \in N : |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$

- *Initalisation :* $Q(0)$ équivaut à dire $|u_0 - \alpha| \leq (1/2)^0 |u_0 - \alpha|$. Inégalité évidente .
- *Hérédité :* Supposons $Q(n)$ vérifiée pour un certain entier $n \geq 0$. Alors :

$$Q(n) \Longleftrightarrow |u_n - \alpha| \leq (1/2)^n |u_0 - \alpha|$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(n) \\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \end{array} \right\} \Longrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$$

Autrement dit $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |u_0 - \alpha|$. La propriété est donc vraie pour $n + 1$, d'où le résultat.

II.2.c $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$ par suite $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n||u_0-\alpha| = 0$. Par le th*é*or*è*me des limites compar*é*es, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

Abou Manal