الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية: 2006)
الموضوع

المادة:	الرياضيات
الشعب(ة):	العلوم الرياضية (أ و ب)
مدة الإنجاز:	4 س
المعامل:	10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول (2 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F. (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

0,5 — 1) ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,5 — 2) أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

1 — 3) أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A "

التمرين الثاني (4 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر التطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بحيث : $f(z)=\frac{1}{6}\left[(1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right]$. ($\bar{z}$ هو مرافق العدد العقدي z)

0,5 — **I** – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$.

II – نضع $z_0=1$ و $z_{n+1}=f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$. ونرمز ب u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

0,5 — 1) أ – بين أن : $0\le u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

0,5 — ب – استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

2) لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k=OM_0+\cdots\cdots+OM_n$.

0,5 — أ – بين أن : $S_n\le 3 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

0,5 — ب – بين أن المتتالية $(S_n)_{n\ge 0}$ متقاربة.(حساب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge 0}$ غير مطلوب)

III – نضع $z=re^{i\theta}$ حيث $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$ و $r\in\mathbb{R}_+^*$.

1 — 1) بين أن : $f(z)=\frac{2}{3}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

0,5 — 2) بين أن النقط M_1 و M_2 و … و M_n مستقيمية (n عنصر من $\mathbb{N}^*$) .

.../...

التمرين الثالث (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2-4y-7x=0$.

I – 1) بين أن (Γ) شلجم وحدد رأسه وبؤرته. 0,75

2) أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. 0,25

II – نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 2(y-1)^2=7x+2$

1) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E).

أ – بين أن : $y\equiv 0[7]$ أو $y\equiv 2[7]$. 1

ب – استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : 0,5

$S=\{(14k^2-4k,7k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k,7k+2)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ و $x\wedge y=9$. 1

التمرين الرابع (3 ن)

1) بين أن : $\dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{t}{3+t^2}+\dfrac{1}{3+t^2}\quad(\forall t\in\mathbb{R})$. 0,25

2) بين أن : $\displaystyle\int_0^\alpha\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt3}Arc\tan\left(\frac{\alpha}{\sqrt3}\right)\quad(\forall\alpha\in\mathbb{R})$. 0,5

3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي : $\displaystyle F(x)=\int_0^x\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du$.

أ – بين أن F دالة قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$. 0,25

ب – باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=\tan\frac{u}{2}$ ، بين أن : 0,75

$$(\forall x\in[0,\pi[)\quad F(x)=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt .$$

(نذكر أن : $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\dfrac{2t}{1+t^2}$ حيث $t=\tan\dfrac{u}{2}$ و $u\in[0,\pi[$)

ج – باستعمال السؤالين 1) و 2) ، بين أن : 0,75

$$(\forall x\in[0,\pi[)\quad F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt3}Arc\tan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt3}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right) .$$

د – باستعمال اتصال الدالة F ، بين أن : $\displaystyle\int_0^\pi\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln 3+\frac{\pi}{\sqrt3}$. 0,5

التمرين الخامس (7,5 ن)

في كل التمرين n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{x}{n}-e^{-nx}$

ليكن (C_n) التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,5 — 1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

0,75 — ب ـ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) .

0,75 — 2) أحسب $f'_n(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

0,5 — 3) أ ـ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

0,25 — ب ـ بين أن $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$.

0,75 — ج ـ بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\geq x+1$. استنتج أن : $f_n(1)>0$.

0,5 — د ـ بين أن : $\dfrac{1}{n}<\alpha_n<1$.

0,5 — 4) أنشئ المنحنى (C_2) . (نأخذ $\alpha_2\approx 0,6$)

0,5 — 5) أ ـ بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 2 ، لدينا :

$$f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1\right) .$$

0,5 — ب ـ استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n)\geq 0$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$.

0,75 — ج ـ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,5 — 6) أ ـ باستعمال السؤال 3) د- ، بين أن : $\dfrac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\dfrac{1}{n}$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$.

0,5 — ب ـ استنتج أن : $\dfrac{\ln(n)}{n}<\alpha_n<\dfrac{2\ln(n)}{n}$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$.

0,25 — ج ـ حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.