Problème :

I)

0.5 **1-** Montrer que $\forall x \in IR : 1 - x^2 \le \frac{1}{1+x^2} \le 1 - x^2 + x^4$

2- Soit h la fonction définie par : $h(x) = Arctan\,(x) - x + \frac{1}{3}x^3$

0.5 **A-** Montrer que $\forall\, x \in IR :\ |h'(x)| \le x^4$

1 **B-** En déduire que : $\forall\, x \in IR :\ |h(x) - h(0)| \le |x|^5$

0.5 **C-** Montrer que : $\lim_{x\to 0} \frac{Arctan\,(x) - x}{x^2} = 0$

II) Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

3 **1-** Etudier les variations de g (les limites, g'(x), tableau de variations) .

1 **2-** Montrer que la fonction g(x)=0 admet une unique solution non nulle α telle que : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

1 **3-** En déduire le signe de g(x) sur$]-1; +\infty[$.

III) Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x} \quad ; \ x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \,;\, f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

1 **1-** Montrer que f est continue sur $[-1; +\infty[$.

1+1 **2-** Calculer f'(x) pour tout x dans $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, puis déduire les variations de f.(En utilisant la question **II)3)**)

3- **A-** En utilisant la question **I)2)C),** Montrer que :

0.5 +0.5 $\lim_{x\to 0} \frac{Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$, puis interpréter graphiquement le résultat.

0.5 **B-**Etudier la dérivabilité de f à droite de -1.

2 **4-** Construire la courbe(C_f) dans un repère orthonormé (on donne $\alpha = -\frac{3}{4}$; $f(\alpha) = \frac{2}{3}$)

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x} + x$

0.5 **I)** Déterminer D_f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1 **II)** **A-** Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0.5 **B-** En déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution β et que < 1 .

0.5 **III)** **A-** Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

0.5 **B-** Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et que :$(f^{-1})'(1) = \frac{3(1-\beta)^2}{2(3\beta^2 - 3\beta + 2)}$

	EXERCICE 2: On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$, qui vérifie les conditions suivantes : -F est deux fois dérivable et F''<0 sur$[0;+\infty[$. -$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$. **1)** On considère la fonction G définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \quad ; x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$
0.5	**A.** Montrer que G est continue à gauche de $\frac{\pi}{2}$.
1	**B.** En appliquant le Th. De Rolle à la fonction G sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,montrer que : $\exists\lambda \in]0;+\infty[: F'(\lambda) = 0$.
	2) Soit H la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par H(x)=F'(x)
0.25	**A.** Montrer que H est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
1	**B.** En déduire que H est une bijection sur $[0;+\infty[$ et que λ est unique
0.25	**C.** Dresser le tableau de variations de F.