ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 03	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2015/2014	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

✓ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة:

■ التمرين رقم 01: (1,5 نقطة)

⇦ لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n=\sin\left[\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right]$.

▪ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n\in 2\mathbb{N}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . 1,5

■ التمرين رقم 02: (3,5 نقطة)

⇦ لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $v_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

و لتكن F_n الدالة المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)$.

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان ، ماذا تستنج ؟ 1

2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right);F_n'(x)=1-(-1)^{n+1}\tan^{2n+2}(x)$. 0,75

ب- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right);F_{2n+1}(x)<x<F_{2n}(x)$ (يمكنك إستعمال TAF) . 1

3)- باستعمال نتيجة2)- ب- حدد النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,75

■ التمرين رقم 03: (4,5 نقطة)

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و f_n الدالة المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

$(\forall x\in[0,1]);f_n(x)=2x^n-x^{n-1}-a$ ، حيث $a\in]0,1[$.

1)- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]0,1[$ و أن $\alpha_n>\frac{1}{2}$. 1

2)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);f_n(\alpha_{n+1})>0$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$. 0,75

3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة و أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=1$ و $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=a$. 1,5

4)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});0\leq\frac{\alpha_n-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}\leq\frac{(\alpha_n)^n-a}{na}$ و إستنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{\sqrt[n]{a}}=1$. 1,25

■ التمرين رقم 04: (5,25 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right);f\left(x\right)=x^2\operatorname{Arctan}\left(x\right).$$

1)- أ- بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$. 0,5

ب- بين أن المعادلة : $\left(E\right):f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $1<\alpha<\sqrt{3}$. 1

2)- أ- بين أن f' تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$. 0,5

ب- بين أن المعادلة : $\left(F\right):f'\left(x\right)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $\left]0,\alpha\right[$. 0,75

ج- إستنتج أن : $\left(\forall x\in\left]0,a\right[\right);0<f'\left(x\right)<\frac{1}{2}$. 0,5

3)- لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}=f\left(u_n\right) \text{ و } u_0=a .$$

أ- بين أن : $u_1<u_0$ و أن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا . 0,75

ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}<\frac{1}{2}u_n$. 0,5

ج- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها . 0,75

■ التمرين رقم 05: (5,25 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);f\left(x\right)=x^3-3x+1$$

1)- بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$. 0,5

2)- لتكن h الدالة المعرفة على I بما يلي :

$$\left(\forall x\in I\right);h\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)} .$$

أ- بين أن h معرفة بالفعل على I و أن $h\left(I\right)\subset I$. 1

ب- بين أن : $\left(\forall x\in I\right);h\left(x\right)-\alpha=\frac{2x+\alpha}{3\left(x^2-1\right)}\left(x-\alpha\right)^2$. 1

ج- بين أن : $\left(\forall x\in I\right);\left|h\left(x\right)-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|x-\alpha\right|^2$. 0,75

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=0$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=h(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in I$ و أن : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|^2$. 0,75

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2^{2^{(n+1)}-1}}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,75

ج- حدد n لكي تكون u_n قيمة مقربة للعدد α بالدقة 10^{-5} . 0,5

■ **تمرين إضافي رقم 01:**

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}f(k)$ ، حيث $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

1)- بين أن $(\forall k\in\mathbb{N}^*);f'(k+1)\le f(k+1)-f(k)\le f'(k)$.

2)- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **تمرين إضافي رقم 02:**

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $v_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$ و $w_n=v_n+\frac{1}{(4n+4)!}$.

▪ بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان و أن نهايتهما المشتركة عدد لا جذري .

■ **تمرين إضافي رقم 03:**

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+);f_n(x)=x^n+\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$.

1)- بين أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R}^+);f_n(\alpha_n)=1$.

2)- أثبت أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها (معللا جوابك) .

■ **تمرين إضافي رقم 04:**

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R});f_n(x)=\sqrt[2n]{\cos^{2n}(x)+\sin^{2n}(x)}$.

▪ بين أن المتتالية $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (حيث x عدد حقيقي ثابت) متقاربة محددا نهايتها .

■ تمرين إضافي رقم 05:

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall t \in \mathbb{R});f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} .$$

1)- ضع جدول تغيرات الدالة f .

2)- أ- تحقق أن f تقبل دالة أصلية وحيدة F على $\mathbb{R}$ تحقق : $F(0)=0$.

ب- بين أن الدالة F فردية .

II- لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R});G(x)=F(2x)-F(x) .$$

1)- تحقق أن الدالة G فردية .

2)- أ- بين أن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب $G'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- إستنتج أن G تناقصية قطعا على $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ و تزايدية قطعا على $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

3)- أ- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});\frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}}<G(x)<\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} .$$

ب- إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي .

ج- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});G(x)<x$ و أن $G\left(\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)\subset\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4)- أرسم المنحنى (C_G) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مبرزا المماس (T) عند أصل المعلم .

(نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ ونعطي $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\simeq 0,4$) .

III- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 \in \left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1}=G(u_n) .$$

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});0<u_n\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2)- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

3)- أحسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

إنتهى الموضوع .