المعامل : 9	إ متحان تجريبي للسنة الثانية باكالوريا رقم 7	المادة : الرياضيات
مدة الإنجاز : 4 ساعات	الشعبة : العلوم الرياضية (أ - ب) ثانوية المختار السوسي نيابة الخميسات	الأستاذ : علي الشريف

آضبط ساعتك و أنجز هذا الإمتحان في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع آخترام ضوابط و طقوس الإمتحان

التمرين الأول : 3ن

I) نعتبر المعادلة (E) التالية: $(1+i\,z)^3(1-i\tan\alpha)=(1-i\,z)^3(1+i\tan\alpha)$

بحيث $z\in C$ و α عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1) ليكن z_0 حلا للمعادلة (E) : أثبت أن $|1+i\,z_0|=|1-i\,z_0|$ و أستنتج أن z_0 عدد حقيقي .

2) أ- أعط الشكل المثلثي للعدد العقدي: $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

ب- ليكن z عددا حقيقيا .نضع $z=\tan\varphi$ حيث φ عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

بين أن المعادلة (E) تكافئ معادلة (E') ذات المجهول φ ثم حل المعادلة (E').

ج- حل المعادلة (E)

II) المستوى العقدي P منسوب إلى م.م.م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

1) نعتبر التحويل S_U من P نحو P الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=u\,z$

(u عدد عقدي بحيث $R_e(u)=1$) : $R_e(u)$ الجزء الحقيقي للعدد u . حدد طبيعة S_U وبين أن المتجهتين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان.

2) ليكن u و u' عددين عقديين بحيث $u=1+i\,k$ و $u'=1+i\,k'$ $\left((k,k')\in IR^2\right)$

أعط طريقة هندسية لإ نشاء M'' انطلاقا من النقطين المعلومتين $K(u)$ و $K'(u')$ في الحالة $k\neq k'$.

التمرين الثاني : 3ن

نعتبر المعادلة : $x^2+py^2=2^n$ (1) حيث (x,y,n) المجهول ينتمي إلى $Z\times Z^*\times IN$ و p عدد أولي فردي

نرمز ب S لمجموعة حلول المعادلة (1) و نضع : $S_1=\{(x,y,n)\in S\,/\,x\wedge y=1\}$

1 - ليكن (x,y,n) عنصرا من S (إن وجد)

أ - تحقق من أ ن $x\neq 0$.

ب - بين أ ن : $x\wedge y\in\{1,2,.....,2^{\alpha}\}$ حيث α عدد صحيح طبيعي يحقق :

$0\leq\alpha\leq E\left(\dfrac{n}{2}\right)$ (هي دالة الجزء الصحيح)

2 - آ ستنتج أ ن : $S\neq\phi \Leftrightarrow S_1\neq\phi$

3 - ليكن (x,y,n) عنصرا من S_1 (إن وجد)

أ - بين أ ن : $x\equiv 1[2]$ و $y\equiv 1[2]$ و $n\geq 2$

ب - بين أنه إداكان $n\geq 3$ فإن : $p\equiv 7[8]$

4 – آستنتج S_1 في حالة $p=3$.

5- حل المعادلة (1) في حالة $p=2003$.

التمرين الثالث : 3ن

نعتبر المجموعة التالية : $E=\left\{M\left(a,b\right)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/\left(a,b\right)\in IR^2\right\}$ مزودة بعملية $(+)$ جمع مصفوفتين و عملية $(\bullet)$ جداء عدد حقيقي في مصفوفة و عملية $(\times)$ جداء مصفوفتين .

1) أ – بين أ ن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي جزئي حقيقي .

ب - حدد أساسا له ثم حدد بعده .

2) ليكن α عددا عقديا لاينتمي إلى IR. بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(C,+,\bullet)$.

3) نعتبر التطبيق φ من $C^*=C-\{0\}$ نحو $E^*=E-\{M(0,0)\}$ المعرف بما يلي :

$$\left(\forall z=a+b\alpha\in C^*\right)\ \varphi(z)=M\left(a,b\right)$$

أ - حدد قيم α التي يكون من أجلها التطبيق φ تشاكلا من $(C^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

ب – بين أن φ تقابل .

4) نأخذ : $\alpha=-1+i$

أ - بين أن : $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية .

ب – بين أن $(E^*,+,\times)$ جسم تبادلي .

ت – حدد مقلوب العنصر $M(a,b)$.

التمرين الرابع : 3ن

نعتبر صندوقا يحتوي على ثمان كرات منها ثلاث خضراء تحمل الأرقام 2 , 2 , 3 وخمس حمراء تحمل الأرقام 2 , 2 , 3 , 3 , 3 . نسحب كرة واحدة من الصندوق ونسجل رقمها k ثم نعيدها إلى الصندوق فإدا كان k=2 نسحب تآنيا كرتين من الصندوق و إدا كان k=3 نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق .

أحسب آحتمال الأحداث التالية :

A " الحصول بالضبط على كرتين خضراوين "

B " الحصول على الأقل على كرة حمراء "

C " علما أننا حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط فما هو آحتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى تحمل الرقم 2

مسألة : 8ن

الجزء الأول :

1) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ell n(x+1)$

أ - أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$.

ب – آ ستنتج إ شارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=e^{-x}.\ell n(e^x+1)$

أ - بين أ ن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

ب - بين أ ن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ت - بين أ ن f قابلة للإ شتقاق على IR و أ ن : $f'(x)=e^{-x}.\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ell n(e^x+1)\right)$

ث – أدرس تغيرات الدالة f على IR .

3) – أ رسم المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م (نأخد : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

4) أ – بين أ ن f تقابل من IR نحو مجال J يتم تحديده .

ب – حدد تغيرات التقابل العكسي f^{-1} على المجال J .

ت – آرسم في نفس المعلم المنحنى (C') الممثل للدالة f^{-1} .

الجزء الثاني :

نعتبرالمتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1 – أ – بين أنه إداكان x من المجال $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$ فإن $f\left(x\right)\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

ب - بين أ ن المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أ ن $\dfrac{1}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{3}{5}$

2 – أ أ درس إ شارة $f\left(x\right)-x$

3 – لكل عدد صحيح طبيعي n نضع $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$

أ – بين أ ن المتتاليتين $\left(v_n\right)$ و $\left(w_n\right)$ متحاديتين (لاحظ $u_n \leq \alpha$)

ب – آستنتج أ ن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$متقاربة و أ ن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

الجزء الثالث:

1) – أ - بين أ ن : $\left(\forall x\in IR\right)\ f'(x)+f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$

ب - آ ستنتج أ ن الدالة الأصلية F للدالة f على IR التي تنعدم في 0 .

2) أ – بين أ ن : $\left(\forall n\in IN / n\geq 2\right)\left(\exists! x_n\in IR_+^*\right) : f(x_n)=\dfrac{1}{n}$

ب – بين أ ن المتتالية $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$تزايدية .

ت – بين أ ن المتتالية $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$غير مكبورة ثم آ ستنتج أ ن . $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

3) نعتبر المتتالية $\left(y_n\right)_{n\geq 2}$المعرفة بما يلي : $y_n = \int_0^{x_n} f(x).dx$

أ - بين أ ن $\left(y_n\right)_{n\geq 2}$ تزايدية و أ ن $\left(\forall n\geq 2\right):0\leq y_n\leq 2\ell n(2)$

ب - بين أ ن $\left(y_n\right)_{n\geq 2}$ متقاربة و أ ن $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\ell n(2)$