Exercice n°01 :(1,5 pts)

✓ On pose : $x = \arctan\left(\sqrt{2}\right)$.

1. (0,5) Vérifier que : $0 < \pi - 2x < \dfrac{\pi}{2}$.
2. (0,5 ; 0,5) Calculer $\tan(\pi - 2x)$, puis en déduire que :

$$\arctan\left(2\sqrt{2}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \pi \ .$$

Exercice n°02 :(3,5 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 2 \text{ et } \left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right), f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) .$$

3. (1,5) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
4. (1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. (1) Montrer que : $\left(\exists \alpha \in \left]0,1\right[\right), f(\alpha + 1) = f(\alpha)$.

Exercice n°03 :(3,5 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) .$$

6. (1,25) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on déterminera .
7. (1,25) En déduire que l'équation $(E) : f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]0,1\right[$.
8. (1) Donner la valeur précise de α .

Exercice n°04 :(5,5 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $I = \left]\dfrac{2}{\pi} - 1, +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{x+1}\right) .$$

9. (1,5) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I .
10. (1,5) Montrer que l'équation $(E) : f(x) = x$ admet une solution unique α dans I et que $\alpha \in \left]0,1\right[$.

maths-inter.ma

Réalisé par Mr: ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : Charif al-idrissi / Benslimane / E-mail : abouzakariyamaths@gmail.com Tel : 06-67-74-56-58

0,5 **11.** Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

1 **12.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

1 **13.** Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°05 :(06 pts)

14. Calculer chacune des limites suivantes :

3 $$(1) : \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[12]{x^5}} \quad \text{et} \quad (2) : \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)} - \frac{1}{3\left(1 - \sqrt[3]{\cos x}\right)}$$

3 $$(3) : \lim_{x \to 1} \frac{4\arctan(2x - 1) - \pi}{x - 1} \quad \text{et} \quad (4) : \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Exercices Bonus :

Exercice n°01 :

- ✓ On considère la fonction : $f : x \mapsto x\cos x$.

2 **15.** Déterminer l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par f.

Exercice n°02 :

2 **16.** Montrer que l'équation : $(E) : x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'as aucune solution Dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°03 :

- ✓ Soit f une fonction continue sur un intervalle I tel que : $f(I) \subset I$.

1,5 **17.** Montrer que : $\{x \in I, f(x) = x\} \neq \varnothing \Leftrightarrow \{x \in I, f \circ f(x) = x\} \neq \varnothing$.

Exercice n°04 :

- ✓ Soient a et b deux nombres réels tel que : $a < b$.

1,5 **18.** Montrer que : $\left(\exists! c \in]a,b[\right), \sqrt{\frac{b-c}{c-a}} - \sqrt{\frac{c-a}{b-c}} = \sqrt{(b-c)(c-a)}$.

maths-inter.ma

Exercice n°05 :

19. Calculer chacune des limites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

1 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\right)$$

2 et $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[4]{1+x}\times\sqrt[5]{1-x}\times\ldots\times\sqrt[2n]{1+x}\times\sqrt[2n+1]{1-x}}{x}$$

2 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$ et $$\lim_{x\to0}\frac{x^3+\sin(2x)-2\sin x}{\arctan(x^3)-(\arctan x)^3}.$$

Exercice n°06 :

✓ Soit f la fonction numérique définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{2}{1-\sin x}.$$

On considère la fonction g définie sur $[2,+\infty[$ par : $g(x)=-2+x-f^{-1}(t.x)$

Où $t\in]2,+\infty[$ et f^{-1} la bijection réciproque de f sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

20. Montrer que l'équation : $(E): g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha(t)$

2 Dans $]2,+\infty[$ et que : $\alpha(t)=\dfrac{2}{t\left[1-\sin\left(\alpha(t)-2\right)\right]}$.

Fin du sujet

Bon courage et bonne Chance

maths-inter.ma