الثانية بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن لحتير	فرض محروس رقم 05 الدورة الأولى: 2009/2008	ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات

Durée : 03h

• التمرين الأول:

لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$ و $J_n=\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}dt$.

1)- أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$(i):I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\times I_n$ و $(ii):(n+1)\times I_{n+1}\times I_n=\frac{\pi}{2}$ و $(iii):\frac{n+1}{n+2}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$.

2)- بين أن المتتالية $\left(\sqrt{n}\times I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3)- باستعمال المتفاوتة : $\left(\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\right);\ \ln(1+x)\le x$ ، أثبت أنه :

$\left(\forall u\in\mathbb{R}\right)$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u\ge -n\Rightarrow\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\le e^{-u}$.

4)- إستنتج أنه : $\left(\forall t\in\left[0;\sqrt{n}\right]\right)\ ;\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\le e^{-t^2}\le\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

5)- بين أنه : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ \sqrt{n}\times I_{2n+1}\le J_n\le\sqrt{n}\times I_{2n-2}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

• التمرين الثاني:

– **الجزء الأول:**

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

و ليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد و ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، حيث الوحدة هي 1cm .

1)- تحقق من أن $D_f=\mathbb{R}$ ، ثم بين أن الدالة f فردية .

2)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. abouzakariya@yahoo.fr

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4)- ضع جدول تغيرات f ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) .

5)- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ، ثم أرسم المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6)- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ على المجال $[0;1]$.

7)- أحسب حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول المحور (Ox) دورة كاملة على المجال $[0;1]$.

- **الجزء الثاني:**

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \text{ و } v_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\tfrac{1}{n+k}\right) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* .$$

1)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة نهايتها $\ln(2)$.

2)- بين أن :

$(\forall t\in\mathbb{R}^{+*});\ 1-\frac{1}{2}t^2\leq f'(t)\leq 1$ ، ثم إستنتج أن : $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*});\ t-\frac{1}{6}t^3\leq f(t)\leq t$.

3)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)\leq v_n\leq u_n$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **الجزء الثالث:**

لتكن F الدالة المعرفة كما يلي :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt\ ;\ x\neq 0 \text{ و } F(0)=\ln(2) .$$

1)- تحقق من أن : $D_F=\mathbb{R}$ ، ثم بين أن الدالة F زوجية .

2)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*});\ -\frac{1}{4}x^2+\ln 2\leq F(x)\leq \ln 2$.

3)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق F في الصفر .

4)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*});\ \frac{f(x)}{2x}\leq F(x)\leq \frac{f(2x)}{2x}$.

5)- إستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C_F) بجوار $+\infty$.

6)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right);\ F'(x) = \dfrac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$.

7)- بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right);\ f(2x) - 2f(x) < 0$ (يمكنك إستعمال رتابة المشتقة f') .

8)- أرسم المنحنى $\left(C_F\right)$ في معلم متعامد و ممنظم .