2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 03	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الثانية : 2010/2009	نيابة الخميسات

Durée:04 heure

• التمرين رقم 01: (03pts)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة : $(\text{E}) : 324x - 245y = 7$.

1)- أ- باستعمال خوارزمية أقليدس أوجد حلا خاصا للمعادلة (E) .

ب- إستنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

2)- ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) ، بين أن : $x \equiv 0[7]$.

3)- ليكن (x, y) حل للمعادلة (E) ، حيث $d = x \wedge y$.

أ- بين أن القيم الممكنة ل d هي 1 أو 7 .

ب- حدد الحلول (x, y) للمعادلة (E) بحيث : $x \wedge y = 1$.

• التمرين رقم 02: $(3,5\text{pts})$

ليكن $G =]-1;1[$ و لكل (x, y) من $G \times G$ ، نضع : $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

1)- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في G .

2)- ليكن f التطبيق المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\text{f}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(G,*)$ ، ثم إستنتج بنية $(G,*)$.

3)- نعتبر المجموعة : $\text{H}_x = \left\{ \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ ، حيث $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

← بين أن $\text{H}_x \subset G$ و أن H_x زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

4)- نعتبر المجموعة : $\text{E} = \left\{ \text{M}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} . \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} / x \in G \right\}$.

أ- بين أن E جزء مستقر من $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$.

ب- بين أن التطبيق : $\text{F} : x \mapsto \text{M}(x)$ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(\text{E};\times)$.

ج- إستنتج بنية $(\text{E};\times)$ ، ثم حدد مقلوب المصفوفة $\text{M}(x)$ في E مهما يكن x من G.

- **التمرين رقم 03**: $(3,5\text{pts})$

في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة A ذات اللحق $a=1+2i$ و ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$(\forall z\in\mathbb{C});\varphi(z)=\frac{1}{6}\left[(3+4i)z+5.\overline{z}\right].$$

1)- بين أن مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث : $\varphi(z)=0$ مستقيم (Δ) ينبغي تحديده .

2)- بين أن مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث : $\varphi(z)=z$ مستقيم (D) ينبغي تحديد معادلته .

3)- بين أن لكل z من $\mathbb{C}$ النقطة M' ذات اللحق $z'=\varphi(z)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

4)- أ- بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C});\dfrac{\varphi(z)-z}{a}=\dfrac{z+\overline{z}}{6}+i\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.

ب- إستنتج أن : $(MM')//(OA)$ لكل نقطتين $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ بحيث : $M\neq M'$.

5)- لتكن M و M' نقطتين من المستوى العقدي (P) لحقاهما على التوالي z و $\varphi(z)$.

- بدراسة الحالتين : $M\in(D)$ و $M\notin(D)$ أعط طريقة لإنشاء $M'(\varphi(z))$ إنطلاقا من $M(z)$.

- **التمرين رقم 04**: (10pts)

- **الجزء الأول**: (03pts)

ليكن $m\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\mathrm{f_m}$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{f_m}(x)=e^{2x}-2me^{x}$.

و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة $\mathrm{f_m}$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_m) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2)- أ- بين أن الدالة $\mathrm{f_m}$ تقبل مطرافا وحيدا عند نقطة I_m ينبغي تحديد إحداثيتها .

ب- بين أنه عندما يتغير البارامتر الحقيقي m على $\mathbb{R}^{*+}$ النقطة I_m تتغير على المنحنى (Γ) الذي معادلته : $y=-e^{2x}$.

3)- أ- أرسم كلا من المنحنيات (Γ) و (C_1) و (C_2) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_1) و (C_2) و (Γ) و (Ox) و المستقيمان اللذان معادلتاهما على التوالي : $x=0$ و $x=\ln 4$.

← الجزء الثاني: (03pts)

لتكن f قصور الدالة f_1 على المجال $\mathrm{I}=[0;+\infty[$.

1)- بين أن f تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده وأن : $\mathrm{f}^{-1}(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ لكل $x\in\mathrm{J}$.

2)- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}):\mathrm{f}^{-1}(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\alpha\in\,]0;1[$.

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=0$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\mathrm{f}^{-1}(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right);0\leq\left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

ج- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

د- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

← الجزء الثالث: (04pts)

1)- ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أثبت أن : $0<\dfrac{\mathrm{f}(x)+1}{x}<\mathrm{f}'(x)$.

2)- إستنتج أن الدالة : $x\mapsto\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$.

3)- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases}\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{f}(t)}{\mathrm{t}}dt\ ;\ x>0\\ \mathrm{F}(0)=-\ln 2\end{cases}$.

أ- أثبت أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);0\leq\mathrm{F}(x)+\ln 2\leq\left[\mathrm{f}(2x)-\mathrm{f}(x)\right]$.

ب- إستنتج أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

ج- أثبت أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);\mathrm{F}(x)\geq\mathrm{f}(x)\times\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ ، ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_{F}) بجوار $+\infty$.

د- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);\mathrm{F}'(x)=\dfrac{\mathrm{f}(2x)-\mathrm{f}(x)}{x}$.

ه- ضع جدول تغيرات الدالة F .