المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

مباراة الدخول إلى مسلك تأهيل أساتذة التعليم الثانوي التأهيلي
بالمراكز الجهوية لمهن التربية والتكوين
دورة يوليوز 2014 - الموضوع

خاص بكتابة الامتحان

رقم الامتحان :

الإسم الشخصي والعائلي : ....
تاريخ ومكان الازدياد : ....

المعامل : 1	مدة الإنجاز : 4 ساعات	مادة : الرياضيات	المسلك : تأهيلي

خاص بكتابة الامتحان	على المصحح التأكد من أن النقطة النهائية هي على :	المسلك : تأهيلي مادة : الرياضيات
	النقطة النهائية بالأرقام .... وبالحروف	
الصفحة : 1 على 12	إسم المصحح وتوقيعه :	307 — رمز الموضوع :

LIRE TRES ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple

ATTENTION :

- **IL NE VOUS EST DELIVRE QU'UN SEUL QCM**
- **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISEES**

1. Cette épreuve comporte 40 questions données comme suit :
   - Partie I : Fonctions numériques
   - Partie II : Calcul intégral
   - Partie III : Suites et séries
   - Partie IV : Les nombres complexes
   - Partie V : Dénombrement
   - Partie VI : Structures algébriques et arithmétique

2. Pour chaque, question numérotée de 1 à 40 ; on vous propose 4 réponses a, b, c et d dont exactement une est bonne.
3. Barème : un point pour toute réponse juste et zéro dans le cas contraire.

4. **EXEMPLES DE REPONSES**

Question 1 : $12 + 2$ vaut : a. 3 b. 5 c. 14 d. Aucune
Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut : a. -3 b. -1 c. 4 d. Aucune

Vous marquerez sur la feuille réponse :

1 a b c d

2. a b c d

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

Partie I : fonctions numériques

Exercice 1 : Les questions sont liées

On considère, pour tout entier n tel que $n \geq 1$, l'application $\varphi_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

Question1 : Pour tout entier n tel que $n \geq 1$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, car :

a. L'application φ_n est continue et décroissante sur $[0;+\infty[$ et que $\varphi_n([0;+\infty[) =]-\infty;1]$

b. L'application φ_n est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que $\varphi_n([0;+\infty[) =]-\infty;1]$

c. L'application φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et que $0 \in \varphi_n([0;+\infty[)$

d. L'application φ_n est continue sur $[0;+\infty[$ et que $\varphi_n([0;+\infty[) =]-\infty;1]$

Question2 : Pour tout entier n tel que $n \geq 1$, on a :

a. $-1 < u_n < 0$

b. $0 < u_n < 1$

c. $1 < u_n < 2$

d. $2 < u_n$

Question3 : Pour tout entier n tel que $n \geq 1$, on a :

a. $\ln(u_n) = \dfrac{-u_n}{2n-1}$

b. $\ln(u_n) = \dfrac{-u_n}{2n+1}$

c. $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{2n-1}$

d. $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{2n+1}$

Question4 : On a :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{e}$ b. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$ c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 2 : les questions de cet exercice sont liées

L'objectif est de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ sachant que $f(x)=x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e-\frac{a}{x}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}$.

On rappelle que $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ et $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ au voisinage de 0.

Question 5 : Au voisinage de $+\infty$ on a :

a. $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b. $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c. $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

d. $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Question 6 : Donc on a :

a. $f(x)=(-e+2a)x+\frac{11e}{24}+o(1)$

b. $f(x)=(-e+2a)x-\frac{11e}{12}+o(1)$

c. $f(x)=(e-2a)x+\frac{11e}{24}+o(1)$

d. $f(x)=(-e-2a)x+\frac{11e}{24}+o(1)$

Question 7 : Ainsi on a :

a. (Si $a<\frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$); (Si $a>\frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$)et (si $a=\frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{11e}{24}$)

b. (Si $a>\frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$); (Si $a<\frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$)et(si $a=\frac{-e}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{11e}{24}$)

c. (Si $a < \frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$); (Si $a > \frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)et(si $a = \frac{-e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{11e}{12}$)

d. (Si $a < \frac{e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$); (Si $a > \frac{e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)et (si $a = \frac{e}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{11e}{24}$)

Exercice 3 : les questions de cet exercice sont indépendantes.

On rappelle que la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ noté $[x]$ est le plus grand entier relatif qui lui est inférieur ou égal.

Question 8 : D l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - [x]}$ est :

a. $D = \mathbb{R}$ et elle est 1-périodique.

b. $D = \mathbb{R}^+$ et elle est 1-périodique.

c. $D = \mathbb{R}^+$ et elle est $\frac{1}{2}$-périodique.

d. $\mathbb{R}$ et elle est $\frac{1}{2}$-périodique.

Question 9 : Si g est la fonction définie par $g(x) = [x]\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ alors :

a. $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$

b. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$ n'existe pas.

c. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = 1$.

d. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$ n'existe pas.

Question 10 : Si f est une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et qui est dérivable en a ; alors :

$$\lim_{h\to0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} \text{ vaut :}$$

a. $f'(a)$ b. $2f'(a)$ c. $\frac{f'(a)}{2}$ d. $\frac{f'(a)}{\sqrt{2}}$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

Partie II : Calcul intégral

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$

Question 11 : Son ensemble de définition est :

a. $D=]0,+\infty[$ b. $D=]1,+\infty[$ c. $D=]-1,+\infty[$ d. $D=]e,+\infty[$

Question 12 : On a :

a. $\varphi(1)=\ln 2$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

b. $\varphi(1)=\frac{\pi}{2}$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$

c. $\varphi(1)=\frac{\pi}{4}$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$

d. $\varphi(1)=\frac{\pi}{2}$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2$

Question 13 : φ vérifie l'équation fonctionnelle :

a. $\forall x\in D, \varphi(x)+\varphi(x+1)=\frac{1}{x}$

b. $\forall x\in D, \varphi(x)+\varphi(x+1)=\frac{1}{x+1}$

c. $\forall x\in D, \varphi(x)+\varphi(x+1)=\frac{1}{x-e}$

d. $\forall x\in D, \varphi(x)+\varphi(x+1)=\frac{1}{x-1}$

Question 14 : Sachant que : $\forall x\in D,\ \frac{1}{2x}\le\varphi(x)\le\frac{1}{x}$ alors :

a. $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$

Partie III : Suites et séries

Les questions de cette partie sont indépendantes

Question 15 : Soient f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N};\ \ u_n = f(n)$

Parmi les affirmations suivantes laquelle est vraie :

a. Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b. Si f est décroissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

c. Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

d. Si $\forall x \in \mathbb{R};\ \ f(x) \geq 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Question 16 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N};\ \ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + 1$

Le nombre des limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

Question 17 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, $n \geq 1$. Alors :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{e}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

Question 18 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}$

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$

b. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

c. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ni arithmétique ni géométrique

d. On ne peut rien en conclure.

Question 19: La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2n}$ est :

a. $\dfrac{1}{7}$ b. $\dfrac{2}{7}$ c. $\dfrac{3}{7}$ d. $\dfrac{9}{7}$

Question 20: Soit $\left(\sum U_n\right)$ une série réelle de terme générale U_n

a. $\left(\sum U_n\right)$ converge dés que $\lim U_n = 0$

b. Si $\left(\sum U_n\right)$ diverge alors $\left(\sum U_n^2\right)$ diverge

c. Si $\left(\sum U_n\right)$ converge alors $\lim U_n = 0$

d. aucune des réponses n'est juste

Partie IV : les nombres complexes

Les questions de cette partie sont liées

Nous considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par : $f : z \to Z = f(z) = \dfrac{z + i\lambda\bar{z}}{1 + i\lambda}$

avec $\bar{z}$ est le conjugué de z et λ **un paramètre réel strictement positif**.

Question 21 : L'application f est bijective si λ est

a. nul
b. égal à 1
c. différent de 1
d. différent de -1

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

مباراة الدخول إلى مسالك تأهيل أساتذة التعليم الثانوي التأهيلي بالمراكز الجهوية لمهن التربية والتكوين			
مادة التخصص : الرياضيات	دورة يوليوز 2014	الموضوع	الصفحة : 8 على 12

Question 22 : Nous écrivons $f^{-1}(z)$ sous forme $f^{-1}(z)=\alpha z+\beta\bar{z}$. La valeur de α est :

a. $\dfrac{1}{1+i\lambda}$

b. $\dfrac{1}{1-\lambda^2}$,

c. $\dfrac{i\lambda}{1-\lambda^2}$

d. $\dfrac{1+i\lambda}{1-\lambda^2}$

Question 23 : La valeur de β est

a. $\dfrac{-i\lambda(1-i\lambda)}{1-\lambda^2}$

b. $\dfrac{i\lambda}{1-i\lambda}$

c. $-\dfrac{\lambda(\lambda+i)}{1-\lambda^2}$

d. $\dfrac{\lambda}{1+i\lambda}$

Question 24 : Nous désignons par ϕ la transformation affine ponctuelle qui au point m d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe $Z=f(z)$; L'ensemble des points invariants par ϕ est l'ensemble des points N du plan tels que $\phi(N)=N$. L'ensemble des points invariants par ϕ est :

a. l'axe des imaginaires

b. l'axe des réels

c. l'ensemble vide

d. aucune des réponses n'est juste

Partie V : Dénombrement et probabilité

Question 25 : On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E et $p_E(F)$ la probabilité de F sachant E

Soient A,B deux événements d'un espace probabilisé tels que : $p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}, p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{3}{7}$ et $p_{\bar{\mathrm{B}}}(\mathrm{A})=\frac{5}{11}$.

Alors $p(\mathrm{A})$ est égale à :

a. $\frac{103}{231}$ b. $\frac{68}{231}$ c. $\frac{35}{77}$ d. $\frac{5}{77}$

Question 26 : Soit X la variable aléatoire réelle dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Alors on a :

a. $p(1<X\leq 4)=\frac{11}{16}$.

b. $p((-2<X\leq 2)\cup(X>3))=1$

c. $p(X\leq 4)=\frac{15}{16}$.

d. $E(X)=3$

Question 27 : Soit $E=\{1;2;3;4.5\}$, on a alors :

a. Le nombre de sous-ensembles de E est: 5^2

b. Le nombre de sous-ensembles de E ayant exactement 2 éléments est : 20

c. Le nombre de sous-ensembles de E contenant 1 est : 5

d. Le nombre de sous-ensembles de E contenant 2 et 3 est : 2^3

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

Question 28: Pour former une équipe de football de 11 joueurs, on a le choix entre 20 joueurs : 17 sont joueurs de champs et 3 sont gardiens de but. Le nombre de d'équipes distinctes qu'on peut former est :

a. $3C_{17}^{11}$ b. $3C_{17}^{10}$ c. $C_{17}^{1}C_{17}^{10}$ d. $3^1C_{17}^{11}$

Partie VI : Structures algébriques et arithmétiques

Exercice 1:

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B=(e_1;e_2;e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x;y;z)$ associe le triplet $(-x+y,-3x-2y-3z,-3x-2y-3z)$

Question 29 : La matrice de f par rapport à la base B est :

a. $M=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -3\\ 1 & -2 & -2\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$ b. $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ -3 & -2 & -3\end{pmatrix}$ c. $M=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & -0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ d. $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Question 30 : Le rang de la matrice M est :

a. égale à 1 et $\ker f$ est une droite vectorielle
b. égale à 3 car le rang d'une matrice est égale au nombre de colonnes non nulles de cette matrice
c. Inférieur ou égale à 2 car M a deux lignes identiques
d. Egale à 2 et $\ker f$ est un sous espace vectoriel de dimension 2

Question 31 : On a:

a. $\operatorname{Im} f$ est inclus dans le plan vectoriel d'équation $3x+2y+3z=0$
b. $\operatorname{Im} f$ contient le vecteur e_2+e_3
c. $\ker f$ admet (0, 1, 1) comme base
d. Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte

Question 32 : Le polynôme caractéristique $P(\lambda)=\det(M-\lambda I)$ de la matrice M est :

a. $P(\lambda)=\lambda^3+6\lambda^2+8\lambda$

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

b. $P(\lambda)=\lambda(\lambda^2-6\lambda+8)$
c. $P(\lambda)=-\lambda(\lambda^2+6\lambda-8)$
d. Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte

Question 33 : L'endomorphisme f admet :

a. Une seule valeur propre
b. 0 pour valeur propre car f n'est pas automorphisme
c. Trois valeurs propre distincts $0, 2, 4$
d. Une valeur propre double

Question 34: L'endomorphisme f est :

a. Diagonalisable car f admet trois valeurs propres distinctes
b. n'est pas diagonalisable car f n'est pas bijectif
c. n'est pas diagonalisable ni trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$
d. Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte

Exercice 2:

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ **une matrice d'ordre 3 et** $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Question 35: La matrice A vérifie :

a. $A^3=A^2+2A$
b. $A^3=-A^2+2A$
c. $A^3=A+I$
d. $A^3=A-I$

Question 36: Sachant que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1, il existe a_n et b_n deux réels tels que $A^n=a_nA+b_nA^2$. Parmi les assertions suivantes laquelle est vraie :

a. $a_{n+1}=2b_n$ et $b_{n+1}=a_n+2b_n$
b. $a_{n+1}=2b_n$ et $b_{n+1}=a_n+b_n$
c. $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=b_n-a_n$
d. aucune des trois propositions précédentes n'est juste

لا يكتب أي شيء في هذا الإطار

Question 37 : De plus on a :

a. $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$

b. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$

c. $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$

d. aucune des trois propositions précédentes n'est juste

Question 38: L'expression de A^n en fonction de A et A² est :

a. $A^n = \left(\frac{2^n}{6} - \frac{2}{3}(-1)^n\right)A + \left(\frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}\right)A^2$

b. $A^n = \left(\frac{2^n}{6} + \frac{2}{3}(-1)^n\right)A + \left(\frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}\right)A^2$

c. $A^n = \left(\frac{2^n}{6} + \frac{2}{3}\right)A + \left(\frac{2^n}{6} + \frac{1}{3}\right)A^2$

d. A^n a une autre expression autre que les trois expressions précédentes

Exercice 3 : Arithmétiques

Question 39: Les solutions de l'équation $6x + 8y = 2$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont :

a. $(-1 + 4k, 1 - 3k); k \in \mathbb{Z}$

b. $(-1 + 8k, 1 - 6k); k \in \mathbb{Z}$

c. $(-1 + 8k, 1 + 6k); k \in \mathbb{Z}$

d. $(-1 + 4k, 1 + 3k); k \in \mathbb{Z}$

Question 40 : Dans $\mathbb{Z}$ on considère l'équation $(E) : x^3 \equiv 1[7]$

a. (E) admet une infinité de solutions.

b. (E) est équivalente à $x \equiv 5[7]$.

c. (E) est équivalente à $x \equiv 1[14]$

d. (E) a pour unique solution 2