ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	**فـــرض محـــروس رقـــم 02** الدورة الأولى : 2010/2009	الثانية بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير

Durée : 04h

■ التمرين رقم 01: $(03pts)$

1)- ليكن θ عنصرا معلوما من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\sin\theta+\sin^2\theta+...+\sin^n\theta \ .$$

بين أن للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ نهاية منتهية q ينبغي تحديدها بدلالة θ .

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n=q+q^2+...+q^n$.

عبر عن v_n بدلالة n و θ ، ثم أدرس حسب قيم θ نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

■ التمرين رقم 02: $(04pts)$

ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$.

و لتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=x-\cos\left(\frac{x}{n}\right)$.

1)- بين أن الدالة f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

2)- إستنتج أن المعادلة : $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$ و أن $0<\alpha_n<1$.

3)- بين أن : $(\forall x\in]0;1[);f_{n+1}(x)<f_n(x)$ ، ثم أدرس رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq2}$.

4)- أثبت أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq2}$ متقاربة و حدد نهايتها .

■ التمرين رقم 03: $(05pts)$

1)- بين أن : $(\forall t\in]0;1]);\frac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t$.

2)- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و ليكن a و b من $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $a<b$.

- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن : $(n+1)a^n<\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$.

4)- أثبت أن المتتاليتين $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان و حدد نهايتهما .

■ **التمرين رقم 04**: $(06pts)$

← **الجزء الأول**: $(04pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right);f(x)=A\mathrm{rctan}\left(\sqrt{\tan x}\right) \text{ و } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

1)- بين أن الدالة f متصلة على المجال I .

2)- أ- أدرس قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر .

ب- بين أن f تزايدية قطعا على I ، ثم ضع جدول تغيراتها .

3)- بين أن المنحنى (C_f) متماثل بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

4)- حل في I المعادلة : $(\mathrm{E}):f(x)=x$ ، ثم أدرس إشارة $f(x)-x$.

5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (حيث الوحدة هي $2cm$) .

← **الجزء الثاني**: $(02pts)$

لتكن $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N});\mathrm{u}_{n+1}=f(\mathrm{u}_n) \text{ و } \mathrm{u}_0\in I.$$

1)- حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون المتتالية $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة .

2)- نفترض أن : $\mathrm{u}_0\notin\left\{0;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$ ، بين أن المتتالية $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

■ **التمرين رقم 05**: $(12pts)$

← **الجزء الأول**: $(04pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f(x)=\sqrt{x}.\ln x \text{ و } f(0)=0.$$

1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر .

3)-بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$.

4)- ضع جدول تغيرات الدالة f .

5)- بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f''(x)=\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد نقطة إنعطافه .

6)- أرسم المنحنى (C_f) بالدقة اللازمة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة القياس هي $3cm$) .

➜ **الجزء الثاني**: $(05pts)$

ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

و لتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\ f_n(x)=\sqrt{x}.(\ln x)^n \text{ و } f_n(0)=0 .$$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (حيث وحدة القياس هي $3cm$) .

1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة f_n على اليمين في الصفر .

3)- بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن :

$$(\forall x]0;+\infty[);\ f_n^{'}(x)=\frac{(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)}{2\sqrt{x}} .$$

4)- ضع جدول تغيرات الدالة f_n (ناقش تبعا لزوجية n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$) .

5)- أدرس إشارة كل من $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ و $f_{n+2}(x)-f_n(x)$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج النقط المشتركة و الوضع النسبي للمنحنيات (C_n) و (C_{n+1}) و (C_{n+2}) .

6)- أرسم في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C_2) و (C_3) .

➜ **الجزء الثالث**: $(03pts)$

1)- ليكن a عددا معلوما من المجال $[1;+\infty[$.

- حدد تبعا لقيم a نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=f_n(a)$.

2)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$.

- بين أن المعادلة : $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[1;+\infty[$ و أن $1<\alpha_n<e$.

3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

4)- أحسب نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

إنتهى الموضوع .

يؤخذ بعين الإعتبار حسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

Barème(../30)