CLASSE :2BAC PC-D	CONTRÔLE CONTINU 1: DATE : 06/12/2019 2h	COMPLEXE SCOLAIRE KHALIL ABDELHAFID SALA ELJADIDA

Barème

PROBLÈME :

I- On considère la fonction g définie par : $g(x) = ax^2 + b\sqrt{x^2-1}$, avec a et b deux réels non nuls.

Déterminer a et b pour que :

1 - la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $\sqrt{2}$ soit parallèle à l'axe des abscisses

- La courbe de passe par le point $A(1;1)$.

II- Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2 & ; \quad |x| \geq 1 \\ f(x) = 1-\sqrt{1-x^2} & ; \quad |x| < 1 \end{cases}$. Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. (on prend $\|\vec{i}\| = 2cm$)

1 1- Vérifier que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$, puis étudier sa parité.

1 2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1 3- Etudier les branches infinies de (C_f) .

1,5 4- Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite et à gauche au point $x_0 = 1$. et donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

5- a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ et vérifier que :

1,5 $$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)} & ; \quad |x| > 1 \\ f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & ; \quad |x| < 1 \end{cases}.$$

1 b- Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f .

6- Soit h la restriction de f sur $I = \left[1;\sqrt{2}\right]$.

0,75 a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

1 b) Montrer que h^{-1} est dérivable en $x_0 = \dfrac{1}{16}$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'(\dfrac{1}{16})$, ($N.B$: $h(\dfrac{5}{4}) = \dfrac{1}{16}$).

1,5 7- Représenter graphiquement (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ la courbe de h^{-1} dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

III- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

0,5 1- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

0,5 2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0,75 3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{5 - u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ **.**

0,75 — 1- Calculer les trois premier termes de la suite $(u_n)_n$ et en déduire que $(u_n)_n$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

0,75 — 2- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < u_n \leq 2$.

0,75 — 3- a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{2}{3}(u_n - 1)$

0, 5 — b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

0, 5 — c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4- On pose $v_n = \dfrac{3 - u_n}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,75 — a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique et déterminer sa raison.

0,75 — b) Ecrire v_n puis u_n en fonction de n .

0,5 — c) Retrouver la limite de la suite $(u_n)_n$.

0,75 — 5- a)- On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, calculer S_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

0,25 — b) Vérifier que : $\dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{2}(1 + v_n)$.

0,75 — c) En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\left(n + 2^{n+1}\right)\right)$.

NB : **<u>1point pour la clarté du raisonnement et la présentation de la copie</u>**