Durée : 02 heures

تمرين رقم 01: (09 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :	
$u_0=2$ و $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$.	
1)- أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),1<u_n\le 2$.	1
ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1).(u_n-3)}{5-u_n}$ واستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .	1,5
2)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}-1\le\frac{2}{3}(u_n-1)$.	1
ب- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_n-1\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .	1,5
3)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=\frac{3-u_n}{u_n-1}$.	
أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=2$ ، ثم استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),v_n=2^n$.	1,5
ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_n=\frac{3+2^n}{1+2^n}$ ، ثم استنتج مرة أخرى نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	1
4)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $S_n=\frac{1}{u_0-1}+\frac{1}{u_1-1}+\frac{1}{u_2-1}+\ldots+\frac{1}{u_n-1}$.	
✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),S_n=\frac{1}{2}(n+2^n)$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	1,5

تمرين رقم 02: (11 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بما يلي :	
$(\forall x\in I),f(x)=2-\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$.	
1)- أ- بين أن : $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .	1
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا معادلته : $y=1$.	1

Durée : 02 heures

2)- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن : $(\forall x\in I),f'(x)=\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .	2
ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$.	1
3)- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع المحور (Ox) في نقطة وحيدة ينبغي تحديد أفصولها .	1
ب- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (مبرزا المماس (T)) .	1,5
4)- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $J=]-\infty,1[$.	1
ب- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $(f^{-1})'(0)=\frac{2}{3}$.	1
ج- ارسم المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغايرا للون (C_f)) .	1,5

● تمارين إضافية:

تمرين إضافي رقم 01: (02 نقط)

✓ احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_n=\frac{2.n^{\frac{3}{2}}+2^n}{n^{\frac{5}{2}}+4^n}$.	2

تمرين إضافي رقم 02: (03 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :	
$u_0=a$ و $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}(a-u_n^2)$ ، حيث $a\in]0,1[$.	
.1 بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),0<u_n<\sqrt{a}$.	0,5
.2 بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),0<\sqrt{a}-u_{n+1}<q.(\sqrt{a}-u_n)$ ، حيث $q=1-\frac{\sqrt{a}}{2}$.	1
.3 بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),0<\sqrt{a}-u_n<q^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	0,5
.4 نضع : $S_n=\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{n-1}u_k$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.	
✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),0<\sqrt{a}-S_n<\frac{1}{n(1-q)}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.	1

Fin du sujet

Bon courage et bonne chance

Réalisé par Mr : ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : Charif al-Idrissi / Benslimane .