المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مباراة الدخول إلى مسلك تأهيل أساتذة التعليم
الثانوي التأهيلي بالمراكز الجهوية لمهن
التربية والتكوين – دورة يوليوز 2012
الموضوع

المجال	مادة التخصص المدرسة : الرياضيات

المعامل:	1
مدة الإنجاز:	4 ساعات

N.B :
Il est interdit d'utiliser la calculatrice, le téléphone portable, tout matériel électronique et toute documentation.

Exercice 1 : (5 points)

0.5
1. On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} \varphi_1(0)=0 \\ \varphi_1(x)=x(1+\ln x);x>0 \end{cases}$

   Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul ,on pose :
   $\varphi_{n+1}(x)=\int_0^x \varphi_n(t)dt$

0.5
   a)montrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction φ_n est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.Donner la valeur de $\varphi_n(0)$.

1
   b) montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :
   $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}_*^+),\varphi_n(x)=x^n(a_n+b_n\ln x)$ et que :
   $(\forall n\in\mathbb{N}^*),a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}-\dfrac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{n+1}$.

0.5
3. calculer b_n en fonction de n.

4. pour tout entier naturel n non nul , on pose : $u_n=\sum_{p=1}^{p=n}\dfrac{1}{p}$.

0.25
   a) Montrer que : $(\forall p\in\mathbb{N}^*)$, $\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t}\geq\dfrac{1}{p+1}$.

0.5
   b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_n\leq 1+\ln n$.

5. Pour tout entier naturel n non nul , on pose : $c_n=n!a_n$.

0.25
   a)Montrer que : $c_n=2-u_n$

0.75
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 2:|c_n|\leq 1+\ln n$.

0.25
   c)Conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

0.5
   d) Montrer que la série de terme général a_n est absolument convergente .

Exercice 2 : (5 points)

Pour tout entier n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n\ln x .$$

0.5 1. a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variation.

0.5 b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égale à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2.

0.5 a) Montrer que $\forall n \geq 3,\ \ 1 < u_n < e$.

0.5 b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

0.5 c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

0.5 d) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

0.25 3.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

0.5 b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3,\ n\ln(n) < v_n$.

Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = x - 2\ln(x)$.

0.5 c) Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 2\ln(n)$.

0.5 d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n)$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$

0.25 e) Montrer que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice 3 : (5 points)

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base B est A .

id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base B est I .

h l'endomorphisme défini par : $h = f - 3id$.

N la matrice de l' endomorphisme h relativement à la base B .

0.75 1.a) Vérifier que : $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ .En deduire $N^2 \neq O$; $N^3 = O$.

0.25 b) Montrer que si λ est valeur propre de N , alors $\lambda = 0$.

0.25 c) Etablir que 0 est la seule valeur propre de h .

0.25 d) En déduire que f admet 3 pour unique valeur propre .

0.25 e) Déterminer une base et la dimension du sous espace propre de f associe à la valeur propre 3.

0.5 f) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? est-il bijectif ?

2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1,-1,1) \;;\; u_2 = h(u_1) \;;\; u_3 = h(u_2) .$$

0.25 a) Calculer u_2 et u_3 .Vérifier que $h(u_3) = (0,0,0)$.

0.25 b) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera B' .

0.25 c) Déterminer la matrice N' de h relativement à la base B' .

0.25 d) Montrer que la matrice de f relativement à la base B' est : $3I + N'$.

3) On considère a matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

0.25 a) Montrer que P est inversible et que :

$$A = P(3I + N')P^{-1} .$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

0.5 *i)* Montrer que : $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$,

0.5 *ii)* Justifier que $(N')^3 = O$,

En déduire trois réels a_n , b_n , c_n tels que : $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2$

0.5 *iii)* Montrer que : $A^n = a_n I + b_n N + c_n N^2$.

Exercice 4 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporte au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{i}{2}$.

F est l'application qui ,à tout point M ,d'affixe z , distinct de A ,associe le point M' d'affixe z' telle que : $2zz' = i(z + z')$.

	On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_I = 1$ et $z_J = i$. Soit K le milieu du segment $[IJ]$.
0.25	1 . a) Déterminer l'affixe z_K de K .
0.75	b) Déterminer les affixes des images des points I, J et K par l'application F
0.25	c) En déduire que F ne conserve pas les milieux .
0.5	2) Déterminer les points invariants par F .
1	3) Montrer que : $M' = F(M) \Leftrightarrow \left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
0.75	4) En déduire l'image par F du cercle (C) de centre A et de rayon 1 .

	<u>Exercice 5</u> : (1.5 points)
0.5	1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ *et* $2n+1$ sont premiers entre eux.
1	2. En déduire que $n+1$ divise C_{2n}^{n}