Mohammed iaalou

Exercice 1:

On muni l'ensemble $I=\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall\left((x,y),(x',y')\right)\in I^2:(x,y)*(x',y')=(x+x'+xx',y+y')$$

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall n\mathbb{N}^*:((x,y))^{(n)}=\underbrace{(x,y)T(x,y)T...T(x,y)}_{n\quad fois}$

Soit $G=\{(x,y)\in I/x\neq -1\}$

1. a. Montrer que G est une partie stable de $(I,*)$.
   b. Montrer que G est un groupe abélien.
2. Soit $H=\{(x,ln(x+1)\quad /x\in]-1,+\infty)\}$.
   a. Montrer que H est un sous-groupe de $(G,*)$.
   b. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in]-1,+\infty[:((x,,ln(x+1)))^{(n)}=((x+1)^n,ln(x+1)^n)$

Exercice 2:

On pose $I=]0,+\infty[$

1. Montrer que $\forall(x,y)\in I^2:e^{x+y}-e^x-e^y+1>0$
2. On définit sur I la loi de composition interne T par :

$$\forall(x,y)\in I^2:xTy=ln\left(e^{x+y}-e^x-e^y+2\right)$$

.

   a. Montrer que $\varphi:\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & ln(x+1)\end{array}$ est une bijective et déterminer sa réciproque φ^{-1}.
   b. Démontrer que φ est un homomorphisme de $(I,\times)$ dans (I,T).
   c. En déduire que (I,T) est un groupe abélien.
3. Déterminer e_T et le symétrique de x, pour tout $x\in I$.
4. On pose : $\forall x\in I,\ x^{(0)}=e$ et $\forall n\in\mathbb{N},x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$. Déterminer $x^{(n)}$ et $\left(x^{(n)}\right)'$.

Exercice 3:

Soit $I=]1,+\infty[$. On définit sur I la loi $*$ par : $\forall(a,b)\in I^2:a*b=\sqrt{1+(a^2-1)(b^2-1)}$

1. Montrer que $*$ est une loi interne sur I
2. Montrer que $\varphi:\begin{array}{ccc}\left(\mathbb{R}^{+*},\times\right) & \longrightarrow & (I,*) \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1}\end{array}$ est un isomorphisme et en déduire la structure de $(I,*)$.
3. a. Montrer que $E=\{2^n\quad /n\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$.
   b. Montrer que $F=\{\sqrt{1+2^m}\quad /m\in\mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $(I,*)$.

Exercice 4:

Soit $G =]-1,1[$. Pour tout $x, y \in G$, on pose $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

1. a. Montrer que $*$ est une loi interne sur G.
   b. Montrer que $*$ est commutative et associative.
   c. Montrer que $(G,*)$ admet un élément neutre à déterminer .
2. Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.

Exercice 5: juillet 2011

Soit $I =]0,1[$. Pour tout $x, y \in I$, on pose : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$.

1. a. Montrer que $*$ est une loi interne sur I.
   b. Montrer que $*$ est commutative et associative.
   c. Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre à déterminer .
2. Montrer que $(I,*)$ est un groupe abélien.
3. On considère les ensembles : $H = \{2^n, /n \in \mathbb{Z}\}$ et $K = \{\dfrac{1}{1+2^n}/n \in \mathbb{Z}\}$.
   a. Montrer que H est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}^{+*}, \times\right)$.
   b. Montrer que $\begin{array}{rccc}\varphi : & (H,\times) & \longrightarrow & (I,*) \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x}\end{array}$ est un homomorphisme de groupe.
   c. En déduire que $(K,*)$ est un sous groupe de $(I,*)$

Exercice 6: Mini exercices

1. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,*)$
   a. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
   b. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G,*)$ ssi $H \subset K$ ou $K \subset H$
   c. $5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$ est t-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$?
2. Montrer que les seuls sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Montrer que $\dot{k}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.
   b. En déduire que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},)^* \times)$ est un groupe ssi n est premier.

Exercice 7: Mini exercices

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, pour tout entier naturel $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.
3. a. Vérifier que : $\mathbb{U}_n = \{\omega_k, \quad k \in \{0,1,...,n-1\}\}$ avec $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
   b. Montrer que $\begin{array}{rccc}\varphi : & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_n,\times) \\ & \dot{k} & \longmapsto & \omega_k\end{array}$ est un isomorphisme.

c. En déduire que $\dfrac{1}{\omega_k} = \omega_{n-k}$ et $\omega_k = \omega_1^k$.

Exercice 8:

On considère l'ensemble $E = \{M_x = \begin{pmatrix} 1 & lnx & ln^2x \\ 0 & 1 & 2lnx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /x \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

1. Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.
2. a. Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & M_x \end{array}$ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^{+*}, \times\right)$ vers $(E, \times)$.
   b. En déduire que $(E, \times)$ est un groupe abélien.
3. a. Déterminer $(M_x)^{-1}$, pour tout $x > 0$.
   b. Résoudre dans E, l'équation : $M_e \times X = M_{e^2}$.
   c. Calculer $(M_x)^n$ et $((M_x)^n)^{-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \neq 1$.
   - Montrer que $F = \{M_{\alpha^x} \quad /x \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(E, \times)$.

Exercice 9: ***

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire.
Soit l'ensemble $E = \{A(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix} /x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. et que $\times$ est commutative dans E.
2. a. Montrer que l'application $\varphi \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(E, \times)$.
   b. En déduire la structure de $(E, \times)$ et déterminer $(A(x))^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble $F = \{A(n) \ /n \in \mathbb{Z}\}$.
   - Montrer que $(F, \times)$ est un sous groupe $(E, \times)$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $A^0(x) = I$ et $\forall n \in \mathbb{N} : A^{n+1}(x) = A^n(x) \times A(x)$ et $A^{-n}(x)$ désigne l'inverse de $A^n(x)$ dans $(E, \times)$.
   a. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : A^p(a) = A(ap)$.
   b. Résoudre dans E, l'équation $X^{-3} = A(\ln 2)$.
5. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, $G = \left\{A^n(\alpha) \times A^m(\beta) \,/\, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$
   a. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe abélien.
   b. Montrer que $F = G \Longleftrightarrow \alpha \wedge \beta = 1$.

Exercice 10: ***

Soient $m \in \mathbb{R}^*$. $E = \mathbb{R} - \{\frac{1}{m}\}$, $I =]-\infty, \frac{1}{m}[$ et $J =]\frac{1}{m}, +\infty[$ on pose $x * y = x + y - mxy$, pour tout x,y de $\mathbb{R}^*$.

Partie I :

1. Vérifier que : $\forall (x, y) \in E^2 : (1 - mx)(1 - my) = 1 - m(x * y)$ et en déduire que $*$ est une loi interne dans E.
2. a. Montrer que $*$ est commutative et associative .
   b. Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

Partie II : On considère l'application φ_m de E dans $\mathbb{R}^*$ définie par : $\forall x \in E : \varphi_m(x) = 1 - mx$.

1. Montrer que φ_m est un isomorphisme de $(E, *)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et déterminer sa réciproque φ_m^{-1}.
2. En déduire encore que $(E, *)$ est un groupe abélien.
3. Déterminer $\varphi^{-1}\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$ et en déduire que I ou bien J est un sous groupe de $(E, *)$
4. $(\forall n \in \mathbb{Z})$, $(\forall x \in E)$. On pose : $\begin{cases} x^{(0)} = e_* \quad pour\, n = 0 \\ x^{(n)} = \underbrace{x * x * \ldots\ldots\ldots * x}_{n \quad fois}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x^{(n)} = (x^{(-n)})', \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$
   - Montrer que pour tout x de E : $\forall n \in \mathbb{Z} : x^{(n)} = \frac{1}{m}(1 - (1 - mx)^n)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $m = 2$.

Partie III : $\forall x \in E$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & x \\ x & 1 - x \end{pmatrix}$ et $H = \{M(x) \quad /x \in E\}$

1. Montrer que H est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$
2. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \psi : & E & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & M(x) \end{array}$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(H, \times)$ et en déduire la structure de $(H, \times)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$
   a. Déterminer $(M(x))^{-1}$, l'inverse de $M(x)$.
   b. Montrer que $(M(x))^n = M\left(\frac{1}{2}(1 - (1 - 2x)^n)\right)$
   c. Donner l'expression de $M(-1)$ et prouver que : $(M(-1))^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + 3^n}{2} & \frac{1 - 3^n}{2} \\ \frac{1 - 3^n}{2} & \frac{1 + 3^n}{2} \end{pmatrix}$.

Partie IV : Pour tout $x \in E$, on pose : $N(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 - x \end{pmatrix}$ et $K = \{N(x) \quad /x \in E\}$

1. Montrer que K est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$
2. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \phi : & E & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & N(x) \end{array}$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(K, \times)$ et en déduire la structure de $(K, \times)$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B = N(\frac{-1}{2})$. Montrer que : $B^n = M\left(\frac{1 - 2^n}{2}\right)$. et $(B^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Exercice 11:

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \quad /(a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. a. Montrer que Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b. En déduire la structure de $(E, +)$.

2. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M(a,b) & \longmapsto & a+b+ib \end{array}$

a. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$

b. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

c. Soit $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E^* = E - \{\Theta\}$. Quel est la structure de $(E^*, \times)$? justifier votre réponse.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 2 + 2i = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation : $M(a,b) \in E : \quad (M(a,b))^3 = M(4,-2)$

Exercice 12:

On considère l'ensemble $A = \{a + b\sqrt{2} \quad / \, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\forall \, (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \, et \, b = 0$

2. a. Montrer que : $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire , commutatif intègre.

b. $(A, +, \times)$ est t-il un corps ?.

3. Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de A, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.

a. Montrer que : $\forall (x,y) \in A^2 : N(x \times y) = N(x) \times N(y)$

b. En déduire que si x est inversible dans $(A, \times)$ alors $N(x^{-1}) = (N(x))^{-1}$.

c. Montrer que x est inversible dans $(A, \times)$ si et seulement si $|N(x)| = 1$.

4. a. Montrer que $1 + \sqrt{2}$ est inversible dans $(A, \times)$ et déterminer son inverse.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \sqrt{2}\right)^{-n} \in A$

Exercice 13:

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \quad /(a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On pose : $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.

1. a. Montrer que $(E, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.

b. Montrer que la famille $\mathbb{B}\,(I, J)$ est une base de $(E, +, .)$ et en déduire $dim(E)$.

c. Montrer que $J^2 = -3I$ puis en déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

d. Soit $S_n = I + J + J^2 + ... + J^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer les coordonnées du vecteur S_n dans la base $\mathbb{B}\,(I, J)$.

2. On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & E \\ a + ib\sqrt{3} & \longmapsto & M(a,b) \end{array}$.

a. Montrer que la famille $\mathbb{B}'\left(1, i\sqrt{3}\right)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, .)$

b. Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ dans $(E,\times)$ puis en déduire la structure de $(E^*,\times)$.

3. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif et déterminer l'inverse d'une matrice $M(a,b)$ de E^*.

4. On pose $A=\frac{1}{2}(I+J)$. Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $A^n=I$.

Exercice 14: (juin 2018 :3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice $\Theta=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel. Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$

b. On pose $J=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$.

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

b. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4. Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right) : \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$

a. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

b. On pose $E^*=E-\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c. En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

5. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 15: rattrapage 2018 : 4 points

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel. Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$

b. Montrer que $dimE=2$

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

b. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4. On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right), \left(\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2\right)$:
   $M(x,y)\,T\,M(x',y') = M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0)$
   Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : pour tout nombre complexe écrit sous forme algébrique $z = x + iy$: $\varphi(x+iy) = M(x,y)$
   a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), T)$.
   b. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans (E, T).
   c. On pose $E^* = E - \{0\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.
5. a. Montrer que T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E.
   b. Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif..

Exercice 16: Devoir 8 - 2011

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) /\ M \times J = J \times M\}$ **Partie I :**

1. a. Donner deux éléments de E.
   b. Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
   c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, J^n \in E$. (où $J^0 = I$).
   d. Justifier que $\times$ est associative dans E et préciser son élément neutre.
2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, J^{3n} = I$.
   b. En déduire que J est inversible dans $(E, \times)$ et déterminer son inverse J^{-1}.
3. a. Quel est la structure de $(E, +, \times)$.
   b. Montrer que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.
4. a. Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel.
   b. Montrer que $\mathbb{B} = \left(I,\ J,\ J^2\right)$ est une famille libre dans E.

Partie II : On pose : $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, pour tout réels a , b et c.

1. Vérifier que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M(a,b,c) \in E$.
2. a. Montrer que pour tout M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   $$M \in E \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = M(a,b,c)$$
   b. En déduire que $\mathbb{B} = \left(I,\ J,\ J^2\right)$ est une base de E et préciser $dimE$.
3. On pose : $A = I + J$, $B = I - J$ et $C = I + J + J^2$
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs A, B et C dans la base $\mathbb{B}$.
   b. Montrer que $\mathbb{B}' = (A, B, C)$ est une base de E.

Mohammed iaalou

Exercice 17: devoir

On munit $I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ de deux lois $*$ et T définies par :

$$\forall (x,y) \in I^2, x * y = \arctan(\tan x + \tan y)$$

$$\forall (x,y) \in I^2, xTy = \arctan(\tan x . \tan y)$$

1. a. Vérifier que $*$ est une loi interne sur I et prouver que $*$ est commutative et associative sur I.

b. Montrer que $(I, *)$ est un groupe abélien.

2. a. Vérifier que T est une loi interne sur I et prouver que T est commutative et associative sur I.

b. Montrer que $\varepsilon = \dfrac{\pi}{4}$ est l'élément neutre dans (I, T).

c. Montrer que T est distributive par rapport à $*$ dans I.

d. Montrer que $(I, *, T)$ est un corps commutatif et préciser l'inverse d'un élément x de I^*.

3. Soit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$

a. Montrer que :

- φ est un isomorphisme de $(I, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
- φ est un isomorphisme de (I, T) dans $(\mathbb{R}, \times)$.

b. $\forall x \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a^{(n)} = \underbrace{a * a * ... * a}_{n \text{ termes}}$. Calculer $a^{(n)}$

Exercice 18: juin 2011 : 3.5 points

On pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$, Pour tout couple $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ et on considère l'ensemble $E = \{M(x,y)/(x;y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un sous groupe du groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, +)$.

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, +, .)$.

b. On pose $J = M(0;1)$. Démontrer que $(I;J)$ est une base de l'espace vectoriel $(E, +, .)$.

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, +\times)$.

b. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

4. Soit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E \\ x+iy & \longmapsto & M(x+y, -y) \end{array}$

a. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \times)$.

b. On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

c. En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

5. Monter que $(E, +, \times)$ est corps commutatif.