Contrôle continue 3 **Prof Salim Mchennec**

Année 2016/2017 **2eme Sc. Maths BIOF**

Problème :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$

1 1) Déterminer Df le domaine de définition de f

1 2) Calculer les limites de f aux bornes de Df , interpréter graphiquement les résultats.

1 3) Montrer que $\forall x \in Df\ :f'(x)=\frac{1}{\pi(3-x)\sqrt{2-x}}$, puis dresser le tableau de variations de f .

1 4) Montrer que $\forall x \in Df\ :f''(x)=\frac{7-3x}{2\pi\sqrt{(2-x)^3}(3-x)^2}$, puis dresser le tableau de concavité de (Cf).

1 5) Construire (Cf).

1 6) Montrer que f est une bijection de $I=Df$ vers un intervalle J à déterminer.

1+1 7) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$, puis construire ($C_{f^{-1}}$) dans le même repère.

1 8) Montrer que : $(\exists k \in]0;1[\,)\ (\forall x\in]0;1[\,)\qquad 0<f'(x)<k$.

1 9) Montrer que $(\exists!\,\alpha\in]0;1[\,)\ :f(\alpha)=\alpha$.

10) On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=\frac{1}{4} \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ,\ \ \forall n\in IN \end{cases}$

1 A- Montrer que : $\forall n\in IN\ \ :0<\ U_n<1$.

1 B- Montrer que : $\forall n\in IN\ :\ |U_{n+1}-\alpha|<k|U_n-\alpha|$.

1 C- Déduire que : $\lim U_n=\alpha$

Exercice :

On considère les deux suites $(U_n)\ et\ (V_n)$ telles que : $\begin{cases} U_0=1\,;V_0=3 \\ \frac{2}{U_{n+1}}=\frac{1}{U_n}+\frac{1}{V_n} \\ 2V_{n+1}=U_n+V_n \end{cases}$

1 1) Montrer que : $\forall n\in IN\ \ :0<\ U_n<V_n$.

1+1 2) Montrer que : (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.

1 3) Montrer que : $\forall n\in IN\ \ :0<\ V_n-U_n\le\frac{V_0-U_0}{2^n}$.

1 4) En déduire que $(U_n)\ et\ (V_n)$ sont convergentes et qu'elles ont la même limite $l\ge 0$.

1 5) On pose la suite (W_n) définie par : $W_n=\sqrt{U_nV_n}$. Montrer que (W_n) est constante.

1 6) Déduire que : $l=\sqrt{3}$.

Bon courage !