Exercice 1: Problème

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4x\sqrt{x}, si\, x \geq 0 \\ f(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x}, si\, x < 0 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie I : 7.5 points

1,00 1. a. *Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.*

1,00 b. *Montrer que f est continue en 0.*

1,00 2. a. *Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter géométriquement le résultat.*

1,00 b. *Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 puis interpréter géométriquement le résultat.*

1,00 3. a *Montrer que $f'(x) = 6\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)$, pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.*

1,00 b *En déduire la monotonie de f sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$*

1,00 4. a. *Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0[$*

0,50 b. *En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$*

Partie II : 6.5 points

1,00 1. a. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$, dans l'intervalle $[0, +\infty[$.*

1,00 b. *Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse positive et déterminer ses coordonnées .*

1,00 2. a. *Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).*

1,50 b. *Construire la courbe (C_f) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

1,50 3. a. *Vérifier que f admet des primitives dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera .*

0,50 b *Déterminer la primitive G de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $G(0) = 1$*

Partie III : 6 points

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0]$

1,00 1. a. *Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.*

1,00 b. *Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère précédent $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

1,00 2. a. *Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ et déduire la valeur de $g^{-1}(-1)$.*

1,00 b. *Montrer que g^{-1} est dérivable en -1 puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(-1)$*

1,00 3. *Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$, pour tout x de J*

1,00 4. *Calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$, pour tout x de J et retrouver $\left(g^{-1}\right)'(-1)$.*