Lycée moussa bno noussaer - khémisset	Devoir maison n° 01 Notions de logique	1^{er} bac sc math int Abdellah belkhatir

- <u>Exercice n° 01</u> :
  - ✓ Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels l'implication Suivante est vraie : $\forall y \in [0,1], x \geq y \Rightarrow x \geq 2y$.

- <u>Exercice n° 02</u> :
  - ✓ Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions Suivantes en justifiant votre réponse :

$$\exists x \in \mathbb{R}, (\sin x = 0 \text{ et } \cos x = 0) \ ; (\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = 0) \text{et} (\exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x \neq 0 \text{ ou } \cos x \neq 0) \ ; (\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 0) \text{ou} (\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \neq 0)$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}, (x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}) \ ; \forall x \in \mathbb{R}^*, \left(\frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}\right)$$

$$\text{et } \exists k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k^2+7k+12} \in \mathbb{N}.$$

- <u>Exercice n° 03</u> :

1)- montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2)- en déduire que quelque soient les nombres réels strictement positifs a ,b et c on a :

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3} \text{ et } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

- <u>Exercice n° 04</u> :

1)- a,b,c et x,y,z sont des nombres réels quelconques.
  - ✓ Montrer que : $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2) \times (x^2+y^2+z^2)$

2)- x , y et z des nombres réels strictement positifs, montrer que :

$$x+y+z=1 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

- <u>Exercice n° 05</u> :

Considérons le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b et c des nombres réels tel que : $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \geq \frac{1}{8a}$.
  - ✓ A l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas, montrer que : $P(\Delta) \geq 0$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $P(x)$) .

- <u>Exercice n° 06</u> :

1)- soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si n n'est pas divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3.

2)- en déduire que $xy(x^2-y^2)$ est divisible par 3, pour tous entiers Naturels non nuls x et y.

- <u>Exercice n° 07</u> :
  - ✓ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, (x^5 - x^3 + x \geq 3) \Rightarrow (x^6 \geq 5)$.

- **Exercice n° 08 :**
  - ✓ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n^2 - 1 \text{ divisible par } 8\right) \Rightarrow \left(n \text{ est pair}\right).$$

- **Exercice n° 09 :**

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

  - ✓ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), xy \le \dfrac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^n + y^n}$.

- **Exercice n° 10 :**

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 des réels tel que :

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4|.$$

  - ✓ Montrer par l'absurde que ces cinq réels sont égaux.

- **Exercice n° 11 :**

Soient a, b et c trois nombres réels positifs avec $a \in [0,1]$.

  - ✓ Montrer que : $\sqrt{ab + (1-a)c} + \sqrt{(1-a)b + ac} \ge \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

- **Exercice n° 12 :**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tel que $a > b$.

  - ✓ Montrer par l'absurde que : $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$.

- **Exercice n° 13 :**
  - ✓ Déterminer les nombres réels x , y et z vérifiant l'équation :

$$(E) : \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

- **Exercice n° 14 :**
  - ✓ Montrer que l'équation suivante n'admet pas de solutions rationnelles : $(E) : 2nx^2 - 2\left(n^2+1\right)x - \left(n^2+1\right) = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Exercice n° 15 :**
  - ✓ Montrer par récurrence que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), 11 / 10^n - (-1)^n$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}\right), n^2 > 2n + 1 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}), \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \ge 2n + 3$$

$$\text{et } \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (n+5) \times 4^{n+1}}{5^n}.$$

- **Exercice n° 16 :**

Soient a_1, a_2 . . . et a_n des entiers naturels non nuls tel que :

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

  - ✓ Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k.a_k \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k.a_k} \le \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Exercice n° 17 :**
  - ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \sqrt{x^2 + 2x} \ge 1 - x \text{ et } (I_2) : \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$