ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 02	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى : 2016/2015	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

✓ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة:

❖ تمرين رقم 01: (02 pts bonus)

⇦ ليكن a و b من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بحيث : $a<b$.

✓ بين أنه : $\cos c = \frac{\sin b-\sin a}{b-a} ;\left(\exists! c\in \left]a,b\right[\right)$ و أن : $0<c-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

❖ تمرين رقم 02: (03 نقط)

1)- ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ بحيث : $a^2\neq b^2$ ، باستعمال مبرهنة رول ، بين أنه :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\exists c\in\left]0,x\right[\right);\frac{a\sin(bx)-b\sin(ax)}{x^3}=\frac{ab}{3}\times\frac{\cos(bc)-\cos(ac)}{c^2}$. 1,5

2)- بين أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin(bx)-b\sin(ax)}{x^3}=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)}{6}$. 1,5

❖ تمرين رقم 03: (3,25 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=x-\cos x$.

1)- أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. 1

ب- إستنتج أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن : $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$. 0,75

2)- أ- بين أنه : $\left(\exists c\in\left]\alpha,\frac{\pi}{4}\right[\right); f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\times f'(c)$. 0,5

ب- بين أن : $f'(c)>\frac{3}{2}$ و إستنتج أن : $\frac{\pi+4\sqrt{2}}{12}<\alpha<\frac{\pi}{4}$. 1

❖ تمرين رقم 04: (3,25 نقطة)

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+); f_n(x)=x^n+\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$.

1)- بين أنه : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R}^+\right); f_n(\alpha_n)=1$. 1

2)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0<\alpha_n<1$ و $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\right); f_{n+1}(x)<f_n(x)$. 0,75

3)- أدرس رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة وأثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$. 1

4)- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(1-(\alpha_n)^n\right)=1$. 0,5

❖ تمرين رقم 05: (1,5 نقطة)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n} \text{ و } v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}\ .$$

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان . 1

2)- أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. 0,5

❖ تمرين رقم 06: (09 نقط)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$(\forall x\in I);\ f(x)=\sqrt{1+\tan x}\ .$$

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}^+$. 0,75

2)- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}\ .$$ 1

3)- لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}f^{-1}(k)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ f^{-1}(n)\le u_n\le f^{-1}(2n)$. 0,5

ب- إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك . 0,5

II- لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});g(x)=\frac{1}{2}f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \text{ و } g(0)=\frac{\pi}{4}\ .$$

1)- أ- بين أن g متصلة على $\mathbb{R}^+$. 0,75

ب- بين أن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});g'(x)=\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}$. 1

2)- ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، بين أنه : $(\exists c\in]0,x[);g(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2\left(c^2+1\right)}$ ، ثم إستنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر محددا $g'_d(0)$. 1

3)- أ- بين أن المعادلة : $g(x)=x$ تقبل على $\mathbb{R}^+$ حلا وحيدا α و أن $\alpha\in]0,1[$. 1

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\left|g'(x)\right|\le\frac{1}{2}$. 0,5

4)- لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N});v_{n+1}=g(v_n) \text{ و } v_0\in\mathbb{R}^+-\{\alpha\}\ .$$

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\left|v_{n+1}-\alpha\right|\le\frac{1}{2}\left|v_n-\alpha\right|$. 0,5

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\left|v_n-\alpha\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left|v_0-\alpha\right|$ ، ثم أحسب نهاية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,5

5)- لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي $(\forall n\in\mathbb{N}^*);w_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}v_k$ ،بين أن : $\lim_{n\to+\infty}w_n=\alpha$. 1

➢ **تمارين إضافية :**

❖ **تمرين رقم 01:**

✓ حدد جميع الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المتصلة في الصفر و التي تحقق ما يلي : 1,5pts

$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(2x)=f(x)\cos x$.

❖ **تمرين رقم 02:**

⇦ لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على قطعة $[a,b]$ بحيث : $f'_d(a)\times f'_g(b)<0$.

✓ بين أنه : $(\exists c\in]a,b[);\ f'(c)=0$. 1,5pts

❖ **تمرين رقم 03:**

⇦ لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق ما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R});\left|f'(x)\right|\le\left|f(x)\right|$ و $f(0)=0$.

✓ بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=0$. 1,5pts

❖ **تمرين رقم 04:**

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ f(x)=\dfrac{-1}{2(1+x^2)}$.

و لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}^+$ و التي تحقق الشرط البدئي : $F(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

✓ بين أنه : $(\exists!\alpha\in\mathbb{R}^{*+});F(\alpha)=\alpha$. 1,5pts

❖ **تمرين رقم 05:**

⇦ ليكن $a\in\mathbb{R}^{*+}$ و $q\in]-1,1[-\{0\}$ و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\dfrac{n}{(1+a)^n}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*);v_n=n\times q^n$.

1)– أ– بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);(1+a)^n\ge\dfrac{n(n-1)}{2}a^2$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ب– أحسب نهاية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ معللا جوابك .

2)– أ– بين أن : $(\forall x\in]-1,0[\cup]0,1[);\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

ب– أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}k.q^{k-1}$.

إنتهى الموضوع .