ثانوية وادي الذهب	فرض محروس رقم 7	الموسم الدراسي	2011/2012
ثا.محمد بن الحسن الوزاني	في مادة الرياضيات	مدة الإنجاز	أربع ساعات
تيفلت – الخميسات	www.riyadiyat.net	المستوى الدراسي	2BSM

❖ التمرين الأول:(3ن)

1)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n=\frac{1}{n}\sum_{0}^{n}cos^2\left(k.\frac{\pi}{2n}\right)$. (1ن)

2)- نعتبر المعادلتين التفاضليتين: $(E_1): y''-2y'+10y=0$ و $(E_2): z''+9z=0$.

أ- نضع : $z=ye^{-x}$ حيث $x\in\mathbb{R}$. بين أن y حل للمعادلة (E_1) يكافئ z حل للمعادلة (E_2). (1ن)

ب- حدد الحل العام للمعادلة (E_2) ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E_1). (1ن)

❖ التمرين الثاني:(4ن)

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نعتبر نردا متوازنا يحمل 6 أوجه مرقمة كما يلي: $3-2-2-1-1-1$.

نرمي النرد في الهواء: إذا حصلنا على الرقم 1 نسحب من الصندوق كرتين تآنيا،و إذا حصلنا على الرقم 2،نسحب منه كرتين بالتتابع و بدون إحلال.

أما إذا حصلنا على الرقم 3 فإننا نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال.

1)- أحسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون. (1ن)

2)- إذا علمت أن الكرتين مختلفتي اللون،أحسب احتمال أن يكون السحب تآنيا. (1ن)

3)- نفترض أن النرد عين الرقم 2، و ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة. حدد قانون احتمال X، ثم أحسب الانحراف الطرازي $\sigma(X)$. (2ن)

❖ التمرين الثالث:(7ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 109x-226y=1$ و S مجموعة حلولها.

1)-أ- تحقق أن المجموعة S غير فارغة. (0.5ن)

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس،بين أن $(-85,-41)\in S$، ثم حل المعادلة (E). (1.5ن)

2)- بين أن المعادلة $109x\equiv 1[226]$ تقبل حلا وحيدا d في $\{0,1,...,226\}$. (1ن)

3)-أ- تحقق أن العدد 227 أولي. (1ن)

ب- بين أن $\left(x^{109}\equiv y^{109}[227]\right)\Rightarrow x=y$، لكل x و y من $\{0,1,...,226\}$. (1ن)

ج- ليكن $b\in\{0,1,...,226\}$. بين أن المعادلة $x^{109}\equiv b[227]$ تقبل حلا في $\{0,1,...,226\}$. (1ن)

4)- حل في المجموعة $\mathbb{Z}/_{227\mathbb{Z}}$ المعادلة $X^2-\bar{6}X+\bar{8}=\bar{0}$. (1ن)

❖ التمرين الرابع: (13ن)

▪ الجزء الأول:

ليكن $a\in\mathbb{C}-\{i\}$. نضع: $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. نعتبر المعادلة: $(E): z\in\mathbb{C},z^2+(a-i)z+(a-i)^2=0$.

1)-أ- حدد الجذور المكعبة للعقدي $(a-i)^3$. (أي حل المعادلة $z^3=(a-i)^3$). (0.5ن)

ب- استنتج حلول المعادلة (E). (0.5ن)

ج- نضع: $a=e^{i\alpha}$ حيث $0<\alpha<\pi$. أكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي. (0.5ن)

2)- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$،

نعتبر النقط $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ حيث: $z_A=i-a$ و $z_B=(a-i)j$ و $z_C=(a-i)\bar{j}$.

ليكن R الدوران الذي مركزه A و يحول B إلى C.

أ- حدد زاوية الدوران R. (0.5ن)

ثانوية وادي الذهب	فرض محروس رقم 7	الموسم الدراسي	2011/2012
ثا.محمد بن الحسن الوزاني	في مادة الرياضيات	مدة الإنجاز	أربع ساعات
تيفلت – الخميسات	www.riyadiyat.net	المستوى الدراسي	$2BSM$

ب- أعط الكتابة العقدية للدوران R في حالة $a=0$. (ن0.5)

ج- أعط الكتابة العقدية للتحويل $R\circ R$، محددا عناصره المميزة. (ن0.5)

3)- نفترض أن $a=1$.

أ- حدد شكلا مثلثيا لكل من z_A و z_B و z_C. (ن0.75)

ب- حدد لحق النقطة D لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. (ن0.25)

ج- هل النقط A و B و C و D متداورة. (ن0.5)

د- بين أن $(AD)\perp(BC)$ و استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$. (ن0.5)

- **الجزء الثاني:**

لتكن $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ و لتكن $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{C}$ نحو E بما يلي: $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}, \varphi(z)=M(x,y)$.

1)- بين أن φ تقابل من $\mathbb{C}$ نحو E، ثم احسب $\varphi(1)$ و $\varphi^{-1}(J)$. (ن1)

2)-أ- بين أن E مستقر بالنسبة للقانونين $+$ و $\times$ في $M_2(\mathbb{R})$. (ن1)

ب- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. (ن1)

ج- حل في E المعادلتين: $M^3=J$ و $(*): M^2-JM-I=0$. (ن2)

3)- لتكن $F=\{M\in E / \det M=1\}$. بين أن $(\varphi^{-1}(F),\times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$. (ن1)

4)-أ- بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي. (ن0.5)

ب- بين أن الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي. (ن0.5)

ج- ليكن M_1 و M_2 حلي المعادلة $(*)$. هل الأسرة (M_1,M_2) أساس ل $(E,+,.)$. (ن1)

❖ **مسألة:(13ن)**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$، وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- **الجزء الأول:**

1)-أ- تحقق أن f دالة زوجية. (ن1)

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f. (ن1)

ج- أرسم المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$). (ن1)

2)- ليكن $\lambda>0$. أحسب $A(\lambda)$، المساحة الهندسية لحيز المستوى المحصور بين (C_f)، و محوري المعلم و المستقيم ذو المعادلة $x=\lambda$، ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$. (ن1)

3)-أ- بين أن الدالة g، قصور الدالة f على $\mathbb{R}^+$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J يجب تحديده، ثم حدد $g^{-1}(x)$، لكل x من J. (ن2)

ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$، منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (ن1)

4)- أحسب بطريقتين مختلفتين حجم مجسم الدوران المولد بدوران منحنى قصور f على المجال $[0,1]$ حول محور الأراتيب دورة كاملة. (ن1)

- **الجزء الثاني:**

نضع: $F_n(x)=\int_0^x (f(t))^n\,dt$ ، لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل x من $\mathbb{R}$.

(ن1) 1)- بين أن F_n دالة فردية.

(ن1) 2)- أحسب $F_1(x)$ و $F_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)$.

3)- نقبل أن الدالة F_n تقبل نهاية منتهية عندما يؤول x إلى $+\infty$ و نضع: $u_n=\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

(ن1) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\geq 0, e^{-nt}\leq (f(t))^n\leq 2e^{-t}$.

(ن1) ب- استنتج أن $\forall x\geq 0, \dfrac{1-e^{-xt}}{n}\leq F_n(x)\leq 2$.

(ن1) ج- استنتج تأطيرا ل u_n و بين أن $u_n\neq 0$ ، لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

- **الجزء الثالث: (غير إجباري).**

1)-أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء،بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\geq 0,(n+1)F_{n+1}(x)-nF_n(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(f(x))^n$$

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+2}=\dfrac{n}{n+1}u_n$.

2)- بين أن: $u_{2n}=\dfrac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}$ و $u_{2n+2}=\dfrac{2\times 4\times\ldots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

3)-أ- تحقق أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,(n+1)u_{n+1}.u_n=\dfrac{\pi}{2}$ ..

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}.u_n$.

....

Bonne chance

....