دراسة الدوال العددية

أهداف الدرس

- التعرف على فرع لانهائي لمنحنى دالة عددية
- تحديد المقاربات العمودية و الأفقية و المائلة
- التمكن من دراسة الفروع الشلجمية
- تحديد فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل أو محور الأراتيب أو مستقيم معادلته $y = ax$
- التعرف على تقعر منحنى و تحديد نقط انعطافه
- توظيف الدالة المشتقة الثانية في تحديد نقط انعطاف منحنى
- التعرف على مركز و محور تماثل منحنى دالة
- توظيف التمثيل المبياني في حل معادلات و متراجحات
- توظيف دراسة الدوال في حل مسائل مستقاة من مواد أخرى أو من الحياة اليومية

القدرات المنتظرة

- حل مبياني لمعادلات و متراجحات
- استعمال الدورية و عناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة
- استعمال إشارة المشتقة الثانية لدراسة تقعر منحنى و تحديد نقط انعطافه

فقرات الدرس

- المستقيمات المقاربة
- الفروع الشلجمية
- تقعر منحنى – نقط الإنعطاف
- محور تماثل – مركز تماثل

I)-المستقيمات المقاربة **Droites asymptotiques :**

نفترض في هذا الدرس أن f دالة عددية لمتغير حقيقي x ، و أن (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نشاط1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x}{x-1}$

لدينا : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

- حساب النهايات عند محدات D_f

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to1^+}(x-1)=0^+$ و $\lim_{x\to1} x=1$)

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$ (لأن $\lim_{x\to1^-}(x-1)=0^-$ و $\lim_{x\to1} x=1$).

التأويل الهندسي

نقول إن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب مواز لمحور الأراتيب (أو عمودي) لمنحنى الدالة f

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

التأويل الهندسي

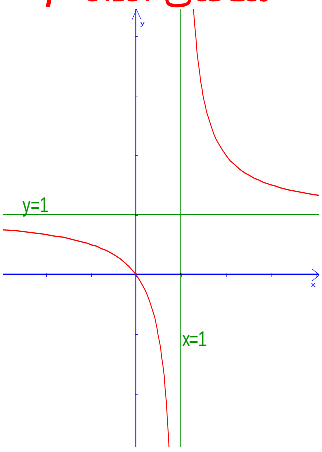
نقول إن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب مواز لمحور الأفاصيل (أو أفقي) لمنحنى f بجوار $+\infty$

و لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

التأويل الهندسي

نقول إن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب مواز لمحور الأفاصيل (أو أفقي) لمنحنى f بجوار $-\infty$

منحنى الدالة f



1)- فرع لانهائي لمنحنى دالة عددية

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x، و(C_f) منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نقول إن (C_f) يقبل فرعا لا نهائيا إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة منه إلى ما لانهاية

2)-المقارب العمودي أو الموازي لمحور الأراتيب

L'asymptote verticale ou parallèle à l'axe des ordonnées

تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب عمودي(أو يوازي محور الأراتيب) للمنحنى (C_f) إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

3)- المقارب الأفقي أو الموازي لمحور الأفاصيل
L’asymptote horizontale ou parallèle à l’axe des abscisses

تعريف

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الأفاصيل (أو أفقي) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

3)- المقارب المائل **l’ asymptote oblique**

في هذه الفقرة،نفترض أن الدالة f تقبل نهاية غير منتهية بجوار $+\infty$ أو $-\infty$

نشاط2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

1)- تحقق من أن : $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

2)- أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

ب أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة

3)- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

أ- تحقق من أن : $\forall x\in D_f, f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$

ب- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$

ج- أول النتيجتين هندسيا.

4)-أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f .

ب- أدرس تغيرات الدالة f

5)- أرسم منحنى الدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تعريف

إذا كانت ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$) على التوالي ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$)،حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$:

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ على التوالي (بجوار $-\infty$)،

خاصية

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b, (a\neq 0)$ مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$.

ملاحظة

- نحصل على نفس الخاصية إذا عوضنا $(x\to+\infty)$ ب $(x\to-\infty)$.
- إذا كانت $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ يكون مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) بجوار ∞.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

لدينا : $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2+x)=0^+$).

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)=0^+$).

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f.

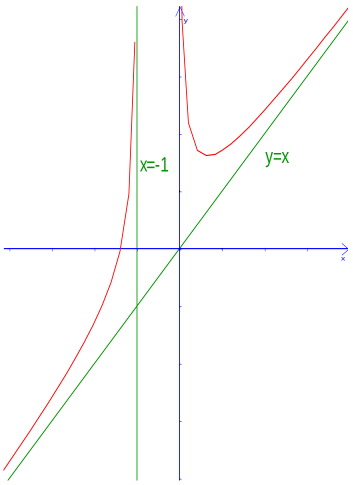
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$) و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$) و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

منحنى الدالة f



تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x+1-\sqrt{x^2-x-2}$

1)- أ- حدد D_f، مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$

2)-أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 2 ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة -1 ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

3)- أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من المجموعة $D_f-\{-1,2\}$

ب- بين أن : $\forall x\in]-\infty,-1[, f'(x)>0$ و أن $\forall x\in]2,+\infty[, f'(x)<0$

ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

4)- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب- أرسم منحنى الدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تعريف2

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجمياتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^3+x-1$.

➢ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

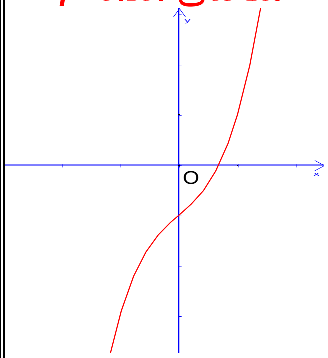
و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=+\infty$

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

➢ بنفس الطريقة نبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

و منه (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

منحنى الدالة f



تعريف3

❖ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,(a\neq 0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$.

مثال

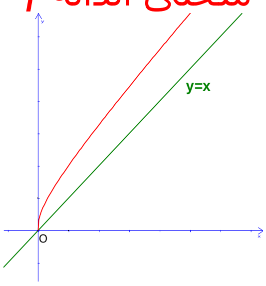
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3}}\right)+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3}}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $y=x$ بجوار $+\infty$

منحنى الدالة f



تمرين

حدد D_f ثم أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f في الحالات التالية:

$f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{2x+1}-x$

ملخص الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$</td><td colspan="3">المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
مع $(a\neq 0)$</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$</td><td>المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=\pm\infty$</td><td>$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
مع $(a\neq 0)$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=b$</td><td>المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=\pm\infty$</td><td>$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$</td></tr>
</table>

II)- تقعر منحنى – نقط انعطاف

1)- تقعر منحنى *concavité d'une courbe*

تعريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I.

- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة إذا كان يوجد فوق جميع مماساته.
- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة إذا كان يوجد تحت جميع مماساته.

2)- نقطة انعطاف *Point d'inflexion*

تعريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I، و $x_0 \in I$.

نقول إن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) إذا تغير تقعره عندالنقطة A.

خاصية1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I، و $x_0 \in I$.

- إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة.
- إذا انعدمت f'' في x_0 و تغيرت إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

خاصية2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I، و $x_0 \in I$.

إذا انعدمت f' في x_0 و لا تغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

- حدد D_f ، حيز تعريف الدالة f، ثم أدرس تقعر منحنى الدالة f و حدد نقط انعطافه.

III)- محور تماثل – مركز تماثل *Axe de symétrie – centre de symétrie*

خاصيات

لتكن f دالة عددية معرفة على D_f و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم و $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f , (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f , f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.

❖ النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f , (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f , f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$.

ملاحظة

❖ إذا كانت f دالة زوجية فإن محور الأراتيب ، محور تماثل منحناها (C_f) في معلم متعامد ممنظم.

❖ إذا كانت f دالة فردية فإن أصل المعلم ، مركز تماثل منحناها (C_f).

IV)- أمثلة من دراسة دالة عددية

مثال1: دراسة دالة حدودية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

1) - حدد D_f ، ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

2) – أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x(x^2 - x - 2)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f.

3)- أ- حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري المعلم.

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم.

مثال3: دراسة دالة مثلثية

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos 4x}$،

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) - حدد D_f ، مجموعة تعريف الدالة f.

2) – أ- بين أن $\forall x \in D_f , f(x) = \frac{1}{4 \sin 2x}$.

ب - بين أن f دالة دورية دورها π .

ج- بين أن f فردية ثم استنتج أن مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3)- أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $D_E = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

ب- أنشىء المنحنى (C_f) على المجموعة $[-\pi, \pi] \cap D_f$

مثال2 : دراسة دالة جذرية

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+1}$.

1) – أ- حدد D_f ، ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

ب- بين أن النقطة $\Omega(-1,2)$ مركز تماثل منحنى الدالة f

2) – أ- بين أن $\forall x \in D_f , f'(x)=\dfrac{(x+1)^2+3}{(x+1)^2}$.

ب- استنتج رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$.

3) – أ- حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري المعلم.

ب- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

ج- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم.

4) - لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في 0 ثم أحسب $(g^{-1})'(0)$.

ج- حدد التعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J