المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي وتكوين
الأطر والبحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

لجهة طنجة تطوان

ملف تربوي تكويني حول مجزوءة :

تنمية "كفاية" حل المسائل

إعــداد

عبد الناصر الصغيري — عبد المالك جبور

عبد اللطيف العمراني — حميد البجطة

مــــاي 2007

قائمة المحتويات

تــقــديــم :

تندرج هذه المجزوءة في إطار ضمان استمرارية التكوين ا لمستمر لفائدة أساتذة مادة الرياضيات بالتعليم التأهيلي ،وذلك مواكبة للإصلاحات التي تشهدها منظومتنا التربوية : "مراجعة المناهج التربوية والمقررات الدراسية ، وطرائق التدريس والتقويم ..."حيث تم تبني مدخل الكفايات كاختيار استراتيجي .فالكتاب الأبيض يدعو إلى تقديم المفاهيم الرياضية على شكل أنشطة ،وتوظيف هذه المفاهيم في حل المسائل. وإن تجسيد هذا المنظور عمليا يتطلب اعتماد أنشطة بيداغوجية فعالة ،تجعل المتعلمين قادرين على بناء معارفهم وتنمية مهاراتهم بأنفسهم وعلى إدماجها في وضعيات ذات معنى ودلالة.

إن الهدف الرئيسي لهذه الدورة التكوينية هو تطوير خبرات الأساتذة وتنمية مهاراتهم في مجال ديداكتيك مادة الرياضيات وذلك ب :

- التدرب على توليد أو إنتاج وضعيات " ملموسة" أو تستجيب لحاجة من الواقع الملموس؛
- معالجة هذه الوضعيات في إطارات مختلفة changement de cadres ؛
- الوقوف على نجاعة بعض الأدوات الرياضية وعلى فعالية طرق الحل المعتمدة؛
- تبادل الرأي وتوضيح أدوار كل من المدرس والتلميذ خلال حصص تدريب المتعلمين على الإدماج.

ولتحقيق هذه الأهداف ولو جزئيا، تقدم وتعالج هذه الوثيقة المحاور التالية :

- المحور الأول : **إعداد وبناء وضعيات مركبة لإدماج التعلمات.**
- المحور الثاني : **الوضعية المسألة : نموذج المتتاليات العددية في الثانوي التأهيلي.**
- المحور الثالث : **تنمية كفاية حل المسائل :توظيف مفهوم الرتابة.**

وستشكل هذه المحاور الثلاثة أرضية لتنشيط الحلقات التكوينية الخمس.

نأمل أن يشكل اختيار هذه المحاور وطريقة معالجتها، علاوة على المنتوج المنتظر من الورشات ، إضافة نوعية تستجيب لبعض انتظارات السادة الأساتذة من التكوين المستمر، وأن تكون وسيلة كفيلة بمساعدة الأستاذ على أداء رسالته النبيلة وأن يتم اغناؤها بالممارسة والمبادرة الشخصية...

والله ولي التوفيق.

تنمية "كفاية" حل المسائل

A. مدخل عام

تمهيد :

- إن مدخل الكفايات يرفض تمرير المعارف وتراكمها ويدعو في المقابل المتعلم إلى إدماج معارفه قصد بناء وتطوير كفايات يستثيرها في مواجهة وحل المشكلات التي قد تعترضه.
- يعتمد تطوير الكفايات على وضع استراتيجيات اكتسابها ومراعاة التدرج في برمجتها واختيار الوضعيات الملائمة لامتلاك المعارف والمهارات والمواقف و التمرن قصد الارتقاء في الفعالية والمردودية في تشغيل الكفاية.
- يتم إدماج القدرات عبر ما سمي بالوضعيات الادماجية باعتبارها المجال الخصب الذي تتمثل فيه مختلف تجليات الكفاية.
- تعتبر الوضعية الادماجية ادن مجال ممارسة الكفاية وحقل تنفيذها على ضوء تتويج لعدة تعلمات.
- إن تطوير الكفاية وتنميتها مرهون بممارستها والتمرن عليها ومن تم تثبيتها وترسيخها وهو ما تتيحه الوضعيات الادماجية لأنها السياق الأمثل الذي تستقر فيه مختلف الموارد والقدرات.
- تكمن أهمية الوضعية الادماجية في التشويق والتحفيز الذي تثيره لدى التلميذ وهو ما يجعله نشطا ومستثمرا لتعلماته السابقة ،لكن إيجاد وضعيات ادماجية مستقاة من المحيط أو الواقع وغير مطبوعة بالاصطناعية ليس أمرا هينا .
- الملاحظ هو طغيان اقتراح ومعالجة تمارين ذات نصوص مغلقة "بين أن ..." أو "أثبث أن ..." حيث تقدم النصوص مقطعة إلى أسئلة جزئية علما أن البرهان رغم أهميته يبقى جانبا فقط من الاستدلال الذي يرتبط بالنشاط الرياضي.فمرحلة البرهنة أساسية لكنها ليست الوحيدة كنشاط رياضي . فإذا كانت إقامة البرهان ،في ممارسة الاستدلال ،الوقفة الضرورية والهامة تضمن الصحة والثبات ،فإنها ليست النشاط الوحيد الممارس في الرياضيات ذلك أن عمليات مثل التجربة وضع المظنونات وتمحيصها وفحصها بكيفية منطقية نقدية : طرح أمثلة مضادة ، تبرير وإقناع ، النظر في المعطيات أهي كلها مفيدة ؟...تشكل في تداخلها وترابطها وتجاذبها جوهر هذه الممارسة في الرياضيات .
- إن تنمية قدرة المتعلم على حل المسائل تعتبر من بين الأهداف العامة لتدريس الرياضيات . وان تحقيق هذا الهدف يمر عبر إكسابه استراتيجيات متنوعة لحل المسائل وتطبيقها وتنمية قدرته على تعميم الحلول والاستراتيجيات على المسائل الجديدة

- ويدعو الكتاب الأبيض إلى تقديم المفاهيم الرياضية على شكل أنشطة ،وتوظيف هذه المفاهيم في حل المسائل، وتفادي الإفراط في تدريب المتعلمين على حل نماذج معينة من التمارين حتى يتمكنوا من مواجهة المواقف الطارئة وحل المسائل غير المتوقعة والتمييز بين الصواب والخطأ.

I. إطلالة على" بيداغوجيا الإدماج "

توفر لنا بيداغوجيا الإدماج كما بسط أسسها روجيرس Roegiers بعض الأفكار التي من شأنها توجيه تعاملنا مع تنمية قدرة المتعلم على حل المسائل. (المقاربة بالكفايات "الأساس")

- تعريف دوكتيل وروجيرس (De Ketele et Roegiers) يؤكد على أن "الكفاية هي إمكانية تعبئة ،بكيفية باطنية ، لمجموعة مندمجة من الموارد بهدف حل صنف من وضعيات-مسألة"
- وعبارة حل صنف من وضعيات مسألة تعني أن الكفاية محدودة ومضبوطة ،ليس فقط من جانب الموارد التي ينبغي تعبئتها ، ولكن كذلك من جانب فئات الوضعيات .وبعبارة أخرى فالكفاية هي الاستطاعة على مواجهة أي وضعية تنتمي إلى صنف معين من الوضعيات له ثوابت معينة وقواسم مشتركة. وإذا خرجنا عن ذلك الصنف من الوضعيات فإننا سندخل في كفاية أخرى.
- ويعتبر المتعلم ممتلكا للكفاية في مجال ما حينما يتمكن من التصرف بكيفية متوقعة في سياقات ومواقف تتسم بدرجة عالية من التقيد ، وذلك لأنه يفهم ما يجب فعله ويتذكر الكيفية والشروط الملائمة للإنجاز الفعال والصائب،ما دام قد تدرب بانتظام على امتلاك الكفاية المعنية في سياقات ومواقف كثيرة متشابهة.
- يتم اكتساب الكفاية من خلال التمكن من الموارد الممثلة في الأهداف التعلمية :معارف،مهارات ،مواقف ، والتمرن على إدماج هذه الموارد باعتماد وضعية مسألة مرتبطة بالكفاية .
- تحدد فئة الوضعيات -المسائل ،أو الوضعيات- المشكلة المتكافئة الخاصة بكفاية بواسطة وسائط تدقق نوع وعدد وطبيعة مكونات الوضعية كالسياق أو المعلومات أو المهمة أو ظروف إنجازها والمعايير التي ستعتمد في تقويم إنتاج التلاميذ ...
- يقتصر في صياغة مراحل الكفاية على تغيير مكونات الوضعيات المرتبطة بها ،وتعقيد المهام المطلوبة تدريجيا.
- يعتبر إدماج التعلمات نشاطا تعليميا يعمل على تمكين التلميذ من استثمار مكتسباته المعرفية و المهاراتية في حل وضعيات-مشكلة . ويهدف الإدماج إلى إعطاء دلالة للتعلمات وتمييز ما هو مهم وما هو أقل أهمية : التركيز على التعلمات الأساسية.وتعلم كيفية استعمال المعارف في وضعية وربط علاقات بين المفاهيم المختلفة التي قد تقدم أو تبدو في البداية متفرقة.ويمكن أن يكون هذا الإدماج نهائيا أي مرتبطا بالهدف النهائي للإدماج OTI أو مرحليا أي مرتبطا بإحدى مراحل الكفاية أي مرتبطا بهدف مرحلي للإدماج OII (أنظر: بيداغوجيا الإدماج :xavier Roegiers) .

يمكن القول ، تأسيسا على ما سبق بان تنظيم وقفات لتدريب التلاميذ على الإدماج واختيار الوضعيات التعليمية المناسبة هو السبيل لتحقيق الأهداف المحددة في البرامج والمناهج في إطار مقاربة بواسطة الكفايات.

والوضعية التعليمية هي مجموعة من العناصر المادية (نص لغوي،شكل هندسي،صورة...) المعروضة على المتعلم في سياق معين(إطار زماني ومكاني واجتماعي) وذات وظيفة محددة (بناء تعلمات جديدة،تعبئة مكتسبات سابقة...) مصحوبة بتوجيهات (consignes)تترجم المقصد البيداغوجي وتحدد المهمة المطلوبة من المتعلم.

إن اعتماد الطرائق التربوية الحديثة يستند إلى استبعاد التدخل المباشر للمدرس في ضبط وتوجيه الفعل التعلمي وذلك باعتبار أن التعلم يتم عن طريق اكتساب المعارف من طرف التلميذ الذي يبني هذه المعارف بنفسه ويتفاعل مع جماعة القسم.

كل هذا يتطلب من المدرس بناء وضعيات تحقق الأهداف المسطرة بتمكين المتعلم من الانخراط في البحث وطرح أفكاره وتقويم استراتيجياته،في سبيل الوصول إلى الحل.ومن أبرز أنواع الوضعيات التي تمكن من تحقيق ذلك الوضعية المسألة.

II. الوضعية المسألة

- مواصفات الوضعية المسألة :

إن تحقيق وضعية مسألة لأهدافها رهين بتوفرها على مجموعة من المواصفات نذكر منها على الخصوص :

- أن تكون العناصر المادية للوضعية مفهومة من طرف التلاميذ وغير قابلة لتأويلات متعددة؛
- ألا تحتمل جوابا بديهيا أو جوابا يمكن التوصل إليه بواسطة خوارزمية معروفة مسبقا من طرف التلاميذ؛
- أن يتطلب حلها : إما اكتشاف وبناء معارف جديدة(فنتحدث عن وضعية معقدة) ،أو تعبئة معارف سابقة لإعادة ترتيبها في إطار استراتيجية ملائمة للوصول إلى الحل(وضعية مركبة) ؛
- أن تكون غنية وتفترض صياغة التلميذ لأسئلة بينية(لا نعمد إلى تجزيء السؤال) ؛
- أن تكون قابلة للإنجاز (تبعا لبنود العقد الديداكتيكي داخل الفصل) .

- ولإعداد وبناء وضعيات ملائمة تحقق الأهداف المرجوة منها يمكن الاستئناس بالمراحل التالية :

1- وضع أسئلة لتحديد الكفايات المنتظر تحقيقها من خلال الوضعية،و الحقل المفاهيمي المرتبط بالوضعية والمسائل التي يمكن حلها بواسطة هذه المفاهيم...

2- بناء الوضعية باختيار إطار(هندسي، جبري، تحليلي..) له علاقة بالحقل المفاهيمي،ودراسة المتغيرات الديداكتيكية (الأعداد،الأشكال...) واختيار الأكثر ملاءمة منها.

3- التحليل القبلي للوضعية بدراسة مختلف الاستراتيجيات الممكنة للوصول إلى الحل تبعا للمتغيرات الديداكتيكية.

4- إعداد و صياغة الوضعية بعد تحديد المعارف والنتائج التي يجب الاحتفاظ بها وتلك التي يجب مأسستها مع التلاميذ.

5- التفكير في الامتدادات الممكنة للوضعية.

- أدوار الفاعلين في إطار معالجة وضعية مسألة:

يفترض اعتماد الوضعية المسألة خلال تناول المفاهيم الرياضية إعادة النظر في أدوار الفاعلين داخل الفصل وتبني تصور فعال ونشيط لدور التلاميذ من خلال التركيز على جهودهم الذاتية مع لعب المدرس لدور المنشط المسهل لسيرورة النشاط.

- خطوات معالجة وضعية مسألة :

معالجة وضعية مسألة يمكن أن تخضع لخطوات منهجية تشكل إطارا نظريا لتناول هذه الوضعيات داخل الفصل.ويمكن إجمال هذه الخطوات في ما يلي :

- تحديد المشكلة بدراسة معطيات المسألة والتأكد من فهم التلاميذ لها.

- صياغة الفرضيات : حيث يعبر التلاميذ عن رأيهم ويقومون بصياغة فرضيات للوصول إلى الحل ومناقشة هذه الفرضيات.

- تجريب الفرضيات : بالتأكد من انسجامها المنطقي وملاءمتها للوضعية.

- الإعلان عن النتائج ومأسستها : وذلك باتفاق الجميع على الحل وصياغته.

على أن سيرورة هذه الخطوات ليست بالضرورة خطية،بل تتداخل فيما بينها وتخضع لقانون الإثبات والرفض (preuve et réfutation)

III. نماذج لأصناف من الوضعيات :

نقترح في هذه الوثيقة:

1- صنف وضعيات تتعلق ب" قيم دنوية- قيم قصوية " لإبراز أهمية بعض الأدوات الرياضية (المعلم والأساس ،رتابة دالة ،الاشتقاق، التحويلات الاعتيادية ...) في حل هذا النوع من الوضعيات.

2- وضعيات توظف " المتتاليات العددية" في حلها

3- وضعيات تستعمل" الرتابة" في معالجتها

إن اقتراح هذه النماذج من الوضعيات تحكمت فيه الاعتبارات التالية :

- إن بعض هذه الوضعيات عبارة عن هياكل squelettes يمكن إلباسها بأشكال مختلفة لتوليد أو إنتاج وضعيات " ملموسة" أو تستجيب لحاجة من الواقع الملموس(وضعيات غير اصطناعية).وهو ما سيوفر للمدرس رصيدا من الوضعيات تنتمي إلى نفس عائلة الوضعيات.

- يمكن معالجة هذه الوضعيات في إطارات مختلفة changement de cadres (معالجة هندسية أو تحليلية أو جبرية).كما يمكن استغلالها ،بعد تعديلها وملاءمتها حسب المستوى والشعبة .

- إن معالجة الوضعيات المتعلقة ب "المتتاليات العددية" و "الترتيب" سيشكل مناسبة للوقوف على جدلية أداة - موضوع dialectique outil-objet بالنسبة لبعض المفاهيم الرياضية .

- إن تدريب التلاميذ على معالجة وضعيات من نفس الصنف ينمي لديهم كفاية حل المسائل.

B. المحورالأول : إعداد وبناء وضعيات مركبة لإدماج التعلمات

تمهيد :

إن ترسيخ القناعة بأهمية وحيوية تدريب التلاميذ على إدماج تعلماتهم خلال وقفات للإدماج هو الهدف الرئيسي لحلقات هذا التكوين المستمر . وحتى يكون لهذا التكوين وقع ايجابي على مستوى الممارسة الصفية ،يقترح الاشتغال في ورشات لإنجاز المهام التالية :

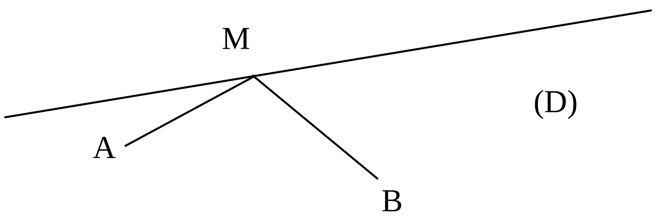
- اختيار مسائل تنتمي إلى أحد الأصناف المقترحة تتوفر فيها شروط الوضعية الادماجية "وضعية مركبة".
- جرد الموارد المستعملة في حل كل مسألة : أهداف تعلمية ،مهارات...
- تقديم مختلف طرق المعالجة وذلك بارتباط مع المستويات الدراسية.
- الوقوف على نجاعة بعض الأدوات الرياضية وعلى فعالية طرق الحل المعتمدة.
- اقتراح وضعيات إضافية، من الواقع المعاش انطلاقا من الوضعيات الرياضية المقترحة"الهياكل" لاغناء رصيد الوضعيات.. .
- تبادل الرأي وتوضيح أدوار كل من المدرس والتلميذ خلال حصص تدريب المتعلمين على الإدماج.

I. مسائل عبارة عن "هياكل" تتعلق بالقيم القصوى والقيم الدنيا لمسارات:

مسألة 1 :

نعتبر الشكل جانبه

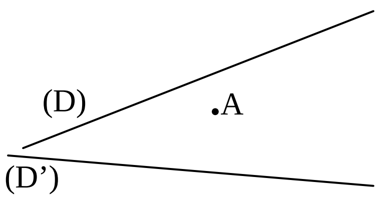
أنشئ النقطة M من المستقيم (D) التي يكون من أجلها المسار AMB دنويا.

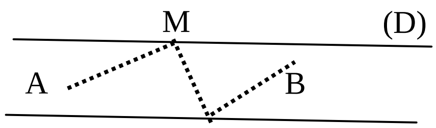


مسألة 2 :

(D) و (D’) مستقيمان معلومان .

A نقطة من المستوى (أنظر الشكل) حدد النقطة M من (D) والنقطة M’ من (D’)بحيث يكون المسار AMM’ دنويا. (طول المسار AMM’ هو AM+AM’)





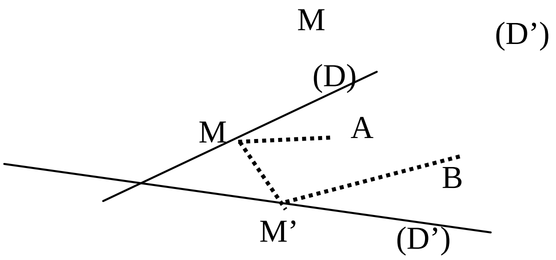
<u>مسألة3</u> :

نعتبر الشكلين جانبه.

أنشئ في كل حالة من الحالتين

النقطة M من (D) و النقطة M’ من

(D’)بحيث يكون المسار AMM’B دنويا.



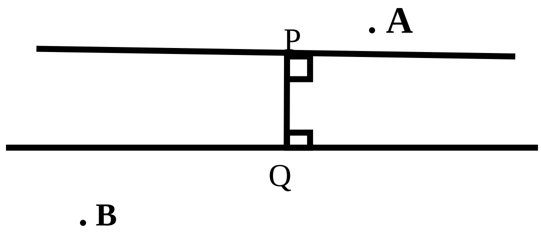
<u>مسألة 4</u> :

نعتبر الشكل جانبه.

حدد موقع المناسب لP و Q بحيث

يكون المسار من A إلى B مرورا من P و Q الأقل طولا.

(يمكن استعمال إزاحة)



<u>مسألة 5</u> :

ABC مثلث متساوي الأضلاع وM نقطة داخله. حدد موقع النقطة M بحيث تكون المسافة MA+MB+MC دنوية.

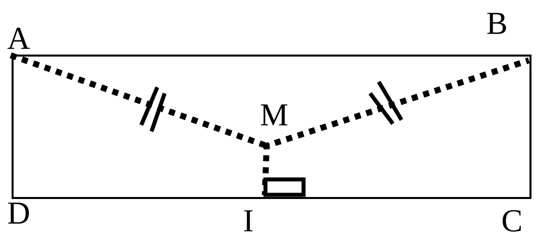
مسألة 6:

ABC مستطيل معلوم وM نقطة داخله

(أنظر الشكل) .

حدد موقع النقطة M بحيث تكون المسافة

MA+MB+MI دنوية.



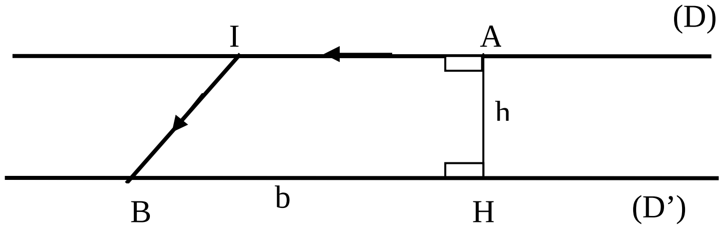
<u>مسألة 7</u> :

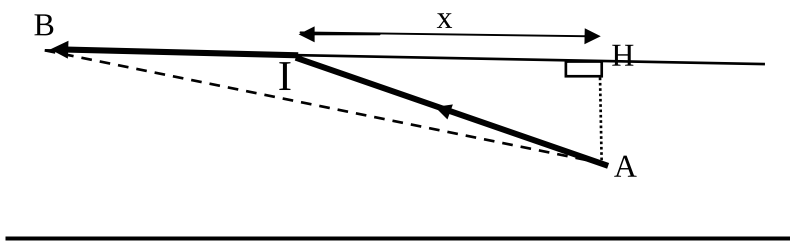
ليكن ABC مثلثا . أنشئ نقطة M من داخل المثلث ABC بحيث تكون المسافة MA+MB+MC قيمة دنوية.

<u>مسألة 8</u> :

جسم يتحرك على مسار (D) بسرعة k مرة أكبر من سرعته داخل الحيز المحصور بين (D) و (D’).

حدد موضع النقطة I على (D) ، الذي من أجله تكون المدة الزمنية لقطع المسار AIB دنوية (أنظر الشكل).

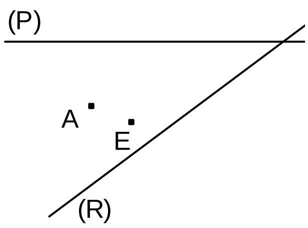




II. نمادج لوضعيات من "الواقع المعاش" مرفقة بحلول وملاحظات :

تجدر الإشارة إلى أن معظم هذه الوضعيات مقتبسة من المسائل"الهياكل" المقترحة في الفقرة السابقة.

<u>مسألة "الفرس"</u>



إنطلق فرس من نقطة A ليأكل العشب عند حافة المرعى (الممثلة بالمستقيم (P))
في نقطة B ثم مر إلى ضفة النهر (الممثلة بالمستقيم (R)) ليشرب في نقطة C ليذهب بعد ذلك إلى الإسطبل E .

(الشكل1)

ما هو السبيل الذي ينبغي أن يسلكه هذا الفرس لكي تكون المسافة التي قطعها دنوية ؟

* الحل:

تحديد السبيل الذي سيسلكه الفرس يعني إيجاد موقع النقطتين B و C
نعتبر النقطة ’A مماثلة النقطة A بالنسبة للمستقيم (P) والنقطة ’E مماثلة

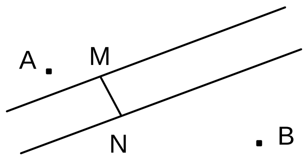
النقطة E بالنسبة للمستقيم (R)

المستقيم (A’E’) يقطع المستقيمين (P) و (R) على التوالي في B و C

* ملاحظة :

يمكن تقديم نفس المسألة باعتبار (P) و (R) متوازيان

<u>مسألة "الجسر"</u>



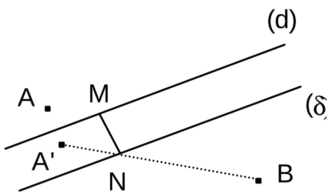
أراد سكان قرية A إنشاء قنطرة $[MN]$ اتجاهها عمودي

على اتجاه نهر يفصل بين هذه القرية وبين سوق B

(الشكل2)

أين ينبغي وضع النقطتين M و N لكي تكون المسافة $AM+MN+NB$ دنوية؟

* الحل:



بما أن المسافة MN ثابتة يكفي أن تكون المسافة $AM+NB$ دنوية

ومن أجل ذلك ننشئ النقطة A' في نصف المستوى الذي تخمه (d)

ويضم النقطة B بحيث تكون المتجهة $\overrightarrow{AA'}$ منظمية على (δ)

ومعيارها هو المسافة بين (d) و (δ).

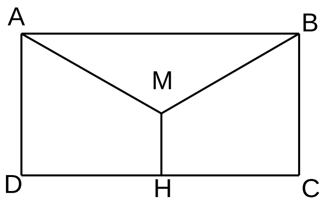
النقطة N هي تقاطع المستقيمين $(A'B)$ و (δ) ثم نستنتج

إنشاء النقطة M (الشكل3)

وفي هذه الحالة $AM+NB=A'N+NB=A'B$ إذن $AM+MN+NB$ دنوية

<u>مسألة" التقني"</u>

أراد أحد التقنيين تثبيت 3 قنوات لتصريف المياه داخل حمام قاعدته مستطيل ABCD



بحيث تنبع هذه القنوات على التوالي من النقط A و B و H منتصف $[CD]$

و تصب في نقطة واحدة M . ما هو موقع النقطة M لكي يكون مجموع أطوال القنوات دنويا ؟

(الشكل4).

* الحل:

o طريقة1: توظيف مسألة فيرما التي يمكن إثباتها في فصل الدوران

نعتبر المثلث HAB. المجموع $MA+MB+MH$ دنوي يكافئ $\widehat{AMB}=\frac{2\pi}{3}$

وبذلك نحدد موقع النقطة M.

o طريقة2:

نعتبر K منتصف القطعة $[AB]$ و نضع $\alpha=\widehat{AMK}$ و $AB=a$ و $BC=b$

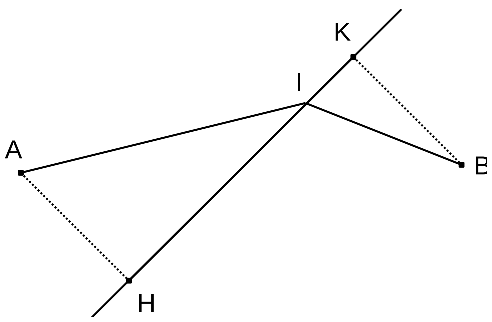
إذن $MA=\frac{a}{2\sin\alpha}$ و $MH=b-\frac{a}{2\tan\alpha}$

ومنه $MA+MB+MH=\frac{a(2-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}+b$

و يكون $MA+MB+MH$ دنويا من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$

(تم إيجاد هذه القيمة من حلال دراسة تغيرات الدالة $\alpha\to\frac{a(2-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}+b$ على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

<u>مسألة" مبدأ فيرما "</u>



أراد أحد معلمي السباحة الذي يوجد في نقطة A
على الشاطئ إنقاذ غريق في نقطة B
حدد موقع النقطة I على حافة البحر التي ينبغي
له الدخول منها لكي يكون الوقت الذي
يستغرقه لبلوغ الغريق دنويا علما أن (الشكل5)

$AH=BK=12m$ و $HK=25m$ و $v_2=\frac{3}{4}v_1$

حيث v_1 و v_2 هما على التوالي سرعته على اليابسة و في الماء .

*ملاحظة أولية: اختيار المعطيات العددية الواردة في المسألة هو فقط لتسهيل العمليات الجبرية

*الحل

ليكن t الوقت الدنوي لبلوغ الغريق

$$t = \frac{IA}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$$

- طريقة تحليلية:

ليكن x أفصول النقطة I في المعلم $\left(H, \vec{u}, \vec{v}\right)$ حيث $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{HA}}{HA}$ و $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{HK}}{HK}$

إذن $t = \frac{1}{3v_1}\left(3\sqrt{x^2+144} + 4\sqrt{(25-x)^2+144}\right)$

الدالة f المعرفة على المجال $[0, 25]$ بحيث : $f(x) = 3\sqrt{x^2+144} + 4\sqrt{(25-x)^2+144}$

تقبل قيمة دنوية من أجل $x = 16$ ومنه $IH = 16$

وبذلك يتحدد موقع النقطة I

* ملاحظة:- الطريقة التحليلية تستلزم عموما حل معادلة من الدرجة الرابعة

<u>مسألة "السلم"</u>

<u>Sujet :</u> J'ai une échelle de 10 m, que je veux poser contre un mur. Seulement, mon armoire de 1 × 1 × 1 m (un cube de 1 m de côté) m'empêche de venir caler l'échelle contre le mur. La question est : quelle hauteur puis-je alors atteindre en posant l'échelle au sol ?

* الحل :

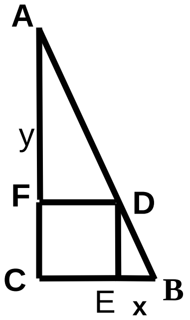
نضع $x = EB$ و $y = AF$

باستخدام مبرهنة طاليس أو المساحات أو ظل زاوية

نجد $xy = 1$

و حسب مبرهنة فيتاغوريس $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10^2$

تحديد x و y يرجع إذن إلى حل النظمة : $\begin{cases}(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10^2 \\ xy = 1\end{cases}$ (1)



الشكل7

- طريقة جبرية:

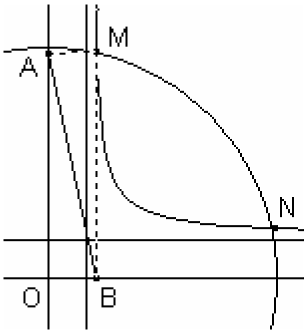
لدينا $xy=1$

إذن $10^2=\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+(x+1)^2$ أي $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=10^2$

وبما أن $x>0$ فإن $x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{101}$ إذن $x^2-\left(-1+\sqrt{101}\right)x+1=0$

ومنه $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{101}\pm\sqrt{98-2\sqrt{101}}\right)$ وبما أن النظمة (1) تماثلية فإن

$y=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{101}\mp\sqrt{98-2\sqrt{101}}\right)$



الشكل8

وبذلك نحصل على ارتفاعين $h_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{101}+\sqrt{98-2\sqrt{101}}\right)\simeq 9.94$

$h_2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{101}-\sqrt{98-2\sqrt{101}}\right)\simeq 1.11$

و أعلى ارتفاع يمكن بلوغه هو h_1

- طريقة هندسية:

نضع : $X=x+1$ و $Y=y+1$ (تم اختيار هذا التغيير لأننا نبحث عن قيمة $y+1$)

إذن النظمة (1) تكتب $\begin{cases} X^2+Y^2=10^2 \\ (X-1)(Y-1)=1 \end{cases}$ (2)

(X,Y) حل للنظمة (2) يعني النقطة $M(X,Y)$ تنتمي لتقاطع الدائرة (C) التي معادلتها $X^2+Y^2=10^2$ و للهذلول (H) الذي معادلته $(X-1)(Y-1)=1$

(C)و (H) متقاطعان لأن لهما نفس المركز O و شعاع الدائرة (C) أكبر من نصف المسافة بين رأسي الهذلول (H) $(10>\sqrt{2})$

نمثل (C) و (H) و ننشئ M نقطة تقاطعهما التي لها أكبر أرتوب (موجب) ثم ننشئ مسقطيها العموديين A و B على محور الأراتيب وعلى محور الأفاصيل على التوالي

وبذلك نحصل على الارتفاع المطلوب OA

* <u>ملاحظات</u> :

الطريقة الهندسية لا تقدم قيمة الارتفاع إلا أنها تحدد موقع النقطة A ومن جهة أخرى تعطينا فكرة حول صياغة مسألة السلم بشكل آخر يرتبط بالقيم الدنيا والقصوى وفي هذا السياق نقترح الصياغة التالية:

أراد أحد الأشخاص شراء سلم طوله دنوي لبلوغ واجهة حائط فوق خزانته التي شكلها مكعب طول حرفه متر واحد (أنظر الشكل)

ما هو طول السلم الذي ينبغي لهذا الشخص شراءه؟

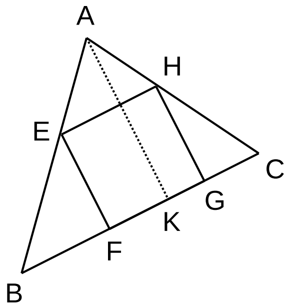
- طريقة جبرية :

ليكن r طول السلم إذن $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=r^2\\ xy=1\end{cases}$

باعتماد نفس الخطوات المعتمدة في الطريقة الجبرية السابقة نجد $x^2-\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)x+1=0$

و هذه المعادلة تقبل حلولا إذا كان $r^2-2-2\sqrt{r^2+1}\geq 0$ أي $r\geq 2\sqrt{2}$

و بالتالي فإن $r=2\sqrt{2}$



مسألة" الفلاح "

يملك أحد الفلاحين قطعة أرضية مربعة الشكل مساحتها هكتارا واحدا . لتشجيع هذا الفلاح اقترحت عليه "الجماعة القروية" توسيع أرضه بحيث يكون شكلها مثلثا مساحته دنوية وجميع رؤوس المربع تنتمي لأضلاع المثلث (الشكل10).

* الحل :

نعتبر S و S_1 و S_2 و S_3 مساحات المثلثات ABC و AEH و EBF و HGC على التوالي الشكل10

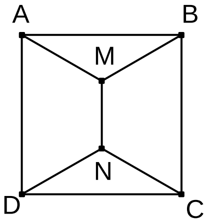
و K المسقط العمودي للنقطة A على (BC) ثم نضع $BC=a$ و $AK=h$

إذن $2S=2+S_1+S_2+S_3$ وبما أن $S_1=h-1$ و $S_2+S_3=a-1$ فإن $2S=a+h$

من جهة أخرى $2S=ah$ إذن $a^2-2Sa+2S=0$ و المعادلة ذات المجهول a تقبل حلا إذا وفقط إذا كان $S\geq 2$ وبذلك تكون مساحة القطعة المثلثية دنوية من أجل $S=2$.

* ملاحظة : - يمكن إضافة سؤال حول طبيعة المثلث ABC

- اقتباس هذه المسألة جاء من خلال دراسة المسألة الكلاسيكية حول كيفية إنشاء مربع رؤوسه منتمية لأضلاع مثلث معلوم .



مسألة "المناطق المعزولة "

تتموقع أربع مناطق سكنية معزولة A و B و C و D على شكل مربع ABCD . ولفك العزلة عن هذه المناطق، قررت إحدى "الجماعات" ربطها بشبكة طرقية ؛ ولأجل ذلك اقترح أحد المهندسين تصميم مفترقين طرقيين (ronds- points) M و N حاملهما هو واسط [AB] و منتصف [MN] هو مركز المربع (الشكل11)

ما هو موقع M و N لكي يكون المسار $MA+MB+MN+NC+ND$ دنويا ؟

* الحل:

نضع $AB=a$ و $\widehat{AMB}=2\alpha$

بما أن $MA+MB+MN+NC+ND=4MA+MN$ و $MA=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ و $MN=a-\dfrac{a}{\tan\alpha}$

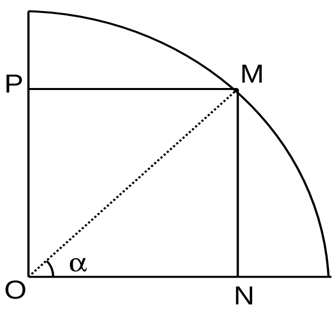
فإن $MA+MB+MN+NC+ND=\dfrac{a(2-\cos\alpha)}{\sin\alpha}+a$ ويكون هذا المجموع دنويا من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

ومنه نستنتج موقع M و N

*ملاحظة : يمكن أيضا حل هذه الوضعية باستعمال "مسألة فيرما"

مسألة" المقاول"

يملك أحد المقاولين قطعة أرضية على شكل ربع قرص شعاعه 10 أمتار . (الشكل6) أراد بناء عمارة قاعدتها مستطيل مساحته قصوية وأحد رؤوسه هو مركز القرص ما هي المساحة المتبقية دون بناء؟



الشكل6

* الحل:

نرمز s لمساحة المستطيل و نضع $\alpha = \widehat{MON}$

إذن $s = 100 \sin\alpha \cos\alpha$ ومنه $s = 50 \sin 2\alpha$

وبما أن s قصوية فإن $\sin 2\alpha = 1$ أي $\alpha = \frac{\pi}{4}$ لأن $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

وبالتالي المساحة المتبقية هي $25(\pi - 2)$ متر مربع.

* ملاحظة:

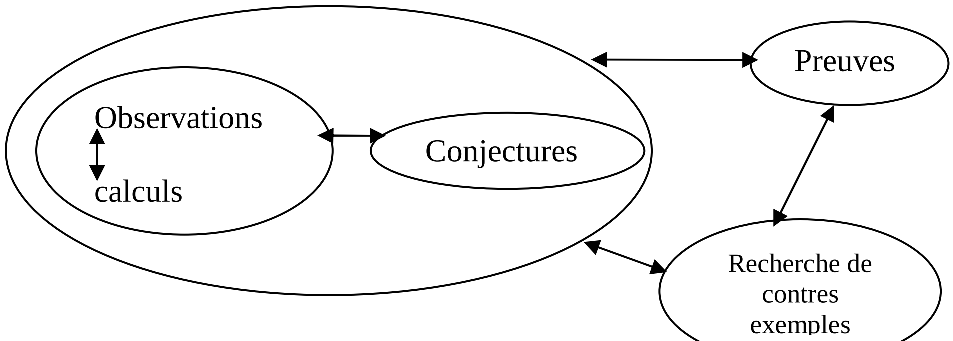
- يمكن اقتراح هذه المسألة في الجذع المشترك العلمي لأن تحديد المساحة القصوية ممكن بكيفية مباشرة دون استخدام الاشتقاق .

- يمكن تعويض المستطيل بشبه منحرف للرفع من درجة صعوبة المسألة المقترحة.

C. المحور الثاني : الوضعية المسألة : نموذج المتتاليات العددية في الثانوي التأهيلي.

I - المسألة

نعني بمسألة كل سؤال يتطلب من الباحث بناء حل أو فعل معين و الذي ينتج عنه مفعول معين. إن مفهوم المسألة لا يكون له معنى إذا كان الحل يعتمد فقط على تأليفة جاهزة من المعارف ، بل ينبغي أن يحمل الجديد ،و أشياء لم يصادفها التلميذ من قبل ، لتمكين هذا الأخير من التجربة و الملاحظة أولا ، ثم وضع مظنونات ، ثم البحث عن إقامة الدليل . و يمكن تشخيص هده الممارسة (النشاط الرياضي) في الخطاطة التالية :



يتطلب هدا النوع من البحث استعمال استدلالات مقبولة ظاهريا (Raisonnements plausibles) و التي لا تنحصر في أنواع الاستدلالات التي تعتبر كتقنيات لإقامة البرهان في إطار منطقي معين ، كالاستدلال الاستنتاجي ،أو بالخلف أو بالترجع .... إننا نمارس الاستدلال كلما وجدنا في حالة البحث عن وضع مظنونة أو البحث عن كيفية إقامة البرهان أو البحث عن أمثلة مضادة لحل مسألة .

<u>جدلية مفهوم -أداة وعملية تغيير الإطار</u> (dialectique objet-outil et changement de cadre)

نقول أن مفهوما رياضيا ما هو أداة عندما نركز اهتمامنا حول استعمال هذا المفهوم في حل مسألة بشكل ضمني أو صريح. ويمكن لأداة رياضية أن تتدخل في حل عدة مسائل، كما أنه يمكن استعمال عدة أدوات مدمجة لحل مسألة واحدة.

تترجم عملية تغيير الإطار بكون كل المفاهيم الرياضية تتدخل في ميادين مختلفة إما خارج الرياضيات (الفيزياء – الاقتصاد ....) و إما داخل الرياضيات (الجبر – الهندسة- التحليل ....) . كما أنه يمكن التمييز بين الإطار الكيفي cadre qualitatif و بين إطار الخوارزميات cadre algorithmique . يتعلق الأمر إذن بتأويل المسائل و صياغتها من شكل إلى شكل آخر بهدف إيجاد الحل أو جزء منه في إطار آخر، علما أن كل إطار هو مجموعة من مفاهيم وعلاقات و تمثلات و أن هده التمثلات لها دور أساسي في توظيف المفهوم و تحويله إلى أداة رياضية .

وأخيرا نعتبر أن التلميذ يتوفر على معارف رياضية إذا كان قادرا على تعبئتها و توظيفها بشكل ظاهر أو ضمني، كأدوات رياضية في حل المسائل. ولكي يتمكن التلاميذ من اكتساب معارف بهذا المعنى لا بد وأن

تتضمن العملية التعليمية مراحل (des moments) يتم أثناءها تمثيل (simuler) الكيفية التي يعمل وفقها الباحث الرياضي .

II – نماذج من مسائل يتدخل في حلها مفهوم المتتاليات العددية:

سنقدم فيما يلي بعض النماذج من مسائل يتدخل في حلها مفهوم المتتاليات العددية و تهدف إلى إرساء طرائق بيداغوجية تمكن التلميذ من التعرف على – متى وكيف – يمكن استعمال هده الأداة و تمكنه من المرور من الإطار الكيفي (cadre qualitatif) إلى إطار الخوارزميات (cadre algorithmique) لحل هده الفئة من الوضعيات- مسألة.

1- المتتاليات و الاقتصاد :

مسألة 1 : (Intérêt composé)

Une somme de 10000DH est placée à un taux d'intérêt annuel de 7%. Chaque année, les intérêts produits sont incorporés au capital(intérêt composé) .calculer le capital obtenu au bout de 20 années de placement .

مسألة2: (عقود الشغل)

تقترح شركة عقدين للتشغيل ابتداء من فاتح يناير 2008 :

العقد الأول : الأجرة الشهرية خلال السنة الأولى هي DH 5000 و تزداد بما قدره DH 400 في فاتح يناير من كل سنة .

العقد الثاني : الأجرة الشهرية هي DH 5000 خلال السنة الأولى و تزداد بما قدره % 12 من فاتح كل سنة .

أي العقدين أفضل بالنسبة لطالب الشغل؟

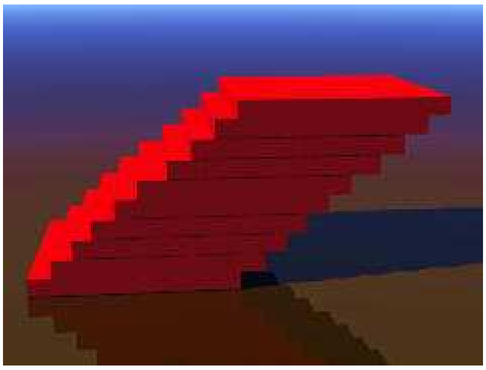
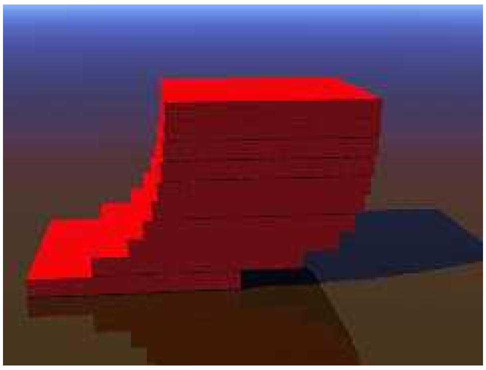
2- المتتاليات و الفيزياء :

مسألة1: On dispose de briques toutes identiques ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions(en cm) 35, 15, 5. On les empile en faisant déborder chacune de 1 cm par rapport à celle qui est en dessous.
Combien peut on empiler sans que la pile ne s'écroule ?

مسألة2

On empile les briques précédentes de la manière suivante : Dans le sens de la longueur on déplace la deuxième brique de 1 cm par rapport à la première ; la troisième de 0,5 cm par rapport à la deuxième, la quatrième de 0,25 cm par rapport à troisième et ainsi de suite … répondre aux mêmes questions que précédemment.

(يمكن تمديد هده المسألة لإدخال نهاية متتالية)

3- المتتاليات والهندسة :

مسألة ABCD est un carré de centre O de longueur 15. Sur chacun de ses cotés , en tournant : dans le même sens ,on construit quatre points A_1, B_1,C_1,D_1 .On construit ainsi un carré $A_1B_1C_1D_1$ .Quel carrée obtient-on si on itère infiniment ce procédé .

4- المتتاليات و التقريبات العشرية

مسألة1 :

Montrer que : 1,999… = 2 .

مسألة2 : تقريبات الجذر مربع.

بملاحظة أن $\sqrt{13}^2 - 3^2 = 4$ ثم أن $\sqrt{13}$ هو حل للمعادلة $x = 3 + \frac{4}{3+x}$ ، اقترح متتالية عددية تمكن من تقريب العدد $\sqrt{13}$ بأية دقة نريد .

5- المتتاليات و التعداد :

مسألة 1 : (Lapin de Fibonacci)

Un couple de lapins, né à la date 0 donne naissance à partir du deuxième mois de son existence, à un nouveau couple chaque mois .Ces nouveaux couples suivent la même loi de reproduction.

1) Calculer le nombre de lapins vivants au bout d'un an. (on suppose que tous les lapins sont encore vivants à la fin de l'année) .

2) Calculer le nombre de lapins au bout de n mois.

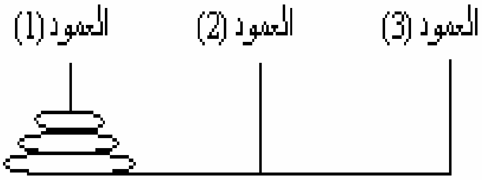
مسألة2 : نعتبر في المستوى المستقيمات : $D_1, D_2, \ldots, D_n$. بحيث كل مستقيمين مختلفين منها متقاطعين، و كل ثلاثة مستقيمات مختلفة غير متلاقية (non concourantes) . ما هي عدد الجهات التي تحددها هذه المستقيمات في المستوى ؟

مسألة3 :

يحتوي صندوق C_1 على كرتين بيضاوين ، و ثلاث كرات سوداء كلها غير قابلة للتمييز باللمس . و يحتوي صندوق C_2 على كرتين بيضاوين و أربعة كرات سوداء كلها غير قابلة للتمييز باللمس. نختار عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا و في آن واحد كرتين، نسجل لونيهما ثم نعيدها إلى نفس الصندوق. إذا كان لهما نفس اللون نكرر هذه العملية من نفس الصندوق، إذا كان لوناهما مختلفان نكرر هذه العملية من الصندوق الآخر و هكذا... .

- أحسب احتمال أن تكون السحبة الثانية من الصندوق C_1 .
- أحسب احتمال أن تكون السحبة رقم n من الصندوق C_1 .

مسألة4 : **" برج هانوي "**



نعتبر ثلاثة أعمدة (الشكل9) بحيث يضم العمود الأول n قرصا ($n\geq3$) مرتبة من الأسفل إلى الأعلى و موضوعة من أكبرها قطرا إلى أصغرها قطرا.

أردنا تحويل هذه الأقراص بنفس الترتيب إلى عمود آخر شرط أن ننقل واحدا تلوى الواحد وأن نضع القرص الأصغر قطرا فوق القرص الأكبر قطرا.

ما هو عدد النقلات الدنوي ؟

الشكل9

* الحل :

ليكن a_n عدد النقلات الدنوي

يمكن دراسة الحالتين n=3 و n=4 و تظنن العلاقة الترجعية $a_{n+1} = 2a_n + 1$

ثم استنتاج أن $a_n = 2^n - 1$

6- المتتاليات و حل المعادلات f(x) = x (méthode d'itération)

مسألة : 1- بين أن المعادلة $2-\frac{1}{2}\ln x = x$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[1,2]$

2- باستعمال مفهوم المتتالية، أعط قيمة مقربة للعدد a بالدقة 10^{-2}.

III- خلاصة

إن معالجة هده الوضعيات مع التلاميذ ينبغي أن تهدف إلى تزويدهم بالتقنيات التي تمكنهم من التعرف على – متى و كيف – يمكن استعمال الأداة -المتتالية- ، و ذلك بالتركيز على النقط التالية :

1. يحضر مفهوم المتتالية العددية كلما ظهرت طريقة (procédé) لا متناهية من العمليات.
2. استعمال ترميز المتتاليات لوصف الظاهرة المدروسة(التعرف على متغيرات المسألة التي يمكن ترميزها بحدود المتتالية) .
3. استعمال جداول و مبيانات لفهم انتظام ظاهرة (**régularité**) و تنمية قدرة التعميم عن طريق وضع مظنونة.
4. وعي الأستاذ بالعوائق و التوفر على تصور ديداكتيكي دقيق لتليينها .(**déconstitution – découpage**)

D. المحور الثالث : تنمية كفاية حل المسائل : توظيف مفهوم الرتابة

I. تمهيد :

إن الهدف من هذا العمل هو مواصلة أعمال التكوين المستمر السابق و الذي تمحورت أشغاله حول مفهوم الكفاية و المفاهيم المرتبطة بها . وقد تم التركيز على أهمية الوضعية و الوضعيات المتكافئة في اكتساب كفاية معلومة .

وإن هذا العمل يهتم أساسا بصياغة وضعيات متكافئة لإكساب التلميذ الكفاية التالية :

" معالجة وضعيات يتطلب حلها توظيف مفهوم الرتابة" .

إن إنجاز هذا العمل سيتم في ورشات حيث سيعمل الأساتذة على صياغة وضعيات تخدم الكفاية حتى تكون مرجعا خلال ممارساتهم التعليمية .

و لاكتساب الكفاية السابقة يمكن اعتبار تعريف الرتابة في عموميته و تفيء العمل إلى مراحل حيث كل مرحلة تهتم بمجال محدود وفق ما يلي:

1) الرتابة و الأعداد .
2) الرتابة و المجموعات .
3) الرتابة و الترتيب .
4) الرتابة و المعادلات.
5) الرتابة و الدوال العكسية .
6) الرتابة والتمثيلات المبيانية.
7) الرتابة و التقعر.
8) الرتابة و النهايات .
9) الرتابة و إشارة الدالة المشتقة .
10) الرتابة و المتتاليات العددية.

II. أصناف وضعيات توظف الرتابة في حلها

<u>1) الرتابة و الأعداد.</u>

إن ترتيب الأعداد مدرج في كل برامجنا التعليمية منذ الأقسام الصغرى و بالتالي فإن مفهوم الرتابة مساير لسيرورة التلميذ التعلمية. و على مستوى التعليم الثانوي الإعدادي و التأهيلي يكون التلميذ هو الآخر مطالبا بمعالجة وضعيات محورها ترتيب أعداد معلومة.

. قارن العددين: $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ و $\sqrt{5}+\sqrt{15}$

الحل:

نضع: $f(x)=\sqrt{10-x}+\sqrt{10+x}$

الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]0,10[$ ومنه $f(8)\le f(5)$

. رتابة الدالة الجذر من الرتبة n تسمح بترتيب الأعداد من الشكل : $\sqrt[3]{23}$ و $\sqrt[5]{17}$ و $\sqrt[7]{13}$.

2) <u>الرتابة و المجموعات .</u>

و يبرز ذالك أساسا في ترتيب المجموعة الواردة في برامجنا الدراسية :

$IN\subset Z\subset D\subset Q\subset IR\subset C$

. f تزايدية على $[a,b]$ $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

. f تطبيق من مجموعة منتهية نحو مجموعة منتهية .

f تقابل $\Rightarrow$ f رتيبة

3) <u>الرتابة و الترتيب .</u>

إن رتابة دوال تبسط عملية التأطير .

. $-4\le x\le 7$ أطر التعبير: $\dfrac{3x-5}{3x+21}$

نضع : $f(x)=\dfrac{3x-5}{3x+21}$ الدالة f تزايدية على المجال $[-4,7]$ ومنه .....

. احسب النهاية: $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}dt$

الدالة الأسية تزايدية على IR ومنه ....

4) <u>الرتابة و المعادلات.</u>

أ-

f دالة معرفة و رتيبة قطعا على مجال I .
المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأكثر حلا وحيدا في I .

. حل في IR المعادلة : $x^{18}+x^{10}=544$ علما أن $\sqrt{2}$ حل لها . (ج م ع) .

الحل.

نضع: $f(x)=x^{18}+x^{10}=544$

f معرفة على IR و زوجية , f تزايدية على IR^{+} .

$0\le x\le\sqrt{2}\Rightarrow -544\le f(x)\le 0$ و $x\ge\sqrt{2}\Rightarrow f(x)\ge 0$ و $f(\sqrt{2})=0$

ب-

f دالة معرفة و رتيبة قطعا على مجال I .
المعادلتان $f(x)=x$ و $f\circ f(x)=x$ متكافئتين .

.حل في IR المعادلة : $\left(x^{3}+\frac{x-1}{8}\right)^{3}+\frac{1}{8}\left(x^{3}+\frac{x-1}{8}\right)-\frac{1}{8}=x$

الحل:

نضع: $f(x)=x^{3}+\frac{x-1}{8}$

الدالة f تزايدية قطعا على IR ومنه .....

ج-

f دالة معرفة و رتيبة قطعا على مجال I . g دالة معرفة من I نحو $f(I)$.
لدينا: $g^{-1}(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=x$.

. $f(x)=e^{x}+2x+1-\frac{1}{e}$

حل IR في المعادلة : $f^{-1}(x)=f(x)$

الحل : $S=\{-1\}$

د- باستعمال التعريف ادرس على IR رتابة الدالتين :

$f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ و $g(x) = x^3 - 4x$

الحل .

اعتبار الحل المبياني للنظمة $\begin{cases} x - y \prec 0 \\ x + y - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$ و للنظمة $\begin{cases} x - y \prec 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 4 \geq 0 \end{cases}$

مع ملاحظة أن : $x^2 + y^2 + xy \geq 2xy$.

ه- حل في IR المعادلة: $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = -1 + \sqrt{2} + 2x - x^2$

الحل:

نضع: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ و $g(x) = -1 + \sqrt{2} + 2x - x^2$

- $f(1) = g(1) = \sqrt{2}$

- f تزايدية على $[1,2]$ و تناقصية على $[2,3]$ ومنه $f(x) \geq \sqrt{2}$ لكل x من $[1,3]$.

- g تناقصية على $[1,3]$ ومنه........ $S = \{1\}$

5) الرتابة و الدوال العكسية .

و هي الحالة الأكثر تداولا في برنامج الثانوي التأهيلي .

6) الرتابة والتمثيلات المبيانية.

إن دراسة الرتابة تشكل مرحلة أساسية في وضع جدول تغيرات دالة وبالتالي التعرف على هيكل تمثيلها المبياني .

7) الرتابة و التقعر.

. f **معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال** I **إذا كانت** f' **تزايدية على المجال** I **فإن لكل** (x, y) **من** I^2 **و لكل** a **من** $[0,1]$ **فإن** $f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$.   . (c) التمثيل المبياني للدال f .

(c) مقعر إذا و فقط إذا كان **لكل** (x,y) **من** I^2 **و لكل** a **من** $[0,1]$ **فإن**
$\cdot f(ax+(1-a)y) \leq af(x)+(1-a)f(y)$

* $(a,b)\in I^2$ و $y=d(x)$ معادلة للمستقيم (AB) حيث $A(a,\ f(a))$ و $B(b,\ f(b))$

إذا كانت f' **تزايدية على المجال** I فإن لكل (x,y) من I^2 $f(x) \leq d(x)$

. a_i , $1 \leq i \leq n$ أعداد حقيقية موجبة قطعا . بين أن : $\left(\prod_1^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_1^n a_i$

الحل:

الدالة $x \to -\ln(x)$ مقعرة على IR^{*+}

. a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا و m عدد حقيقي من المجال $[0,1]$.

بين أن : $1+a^m b^{1-m} \leq (1+a)^m (1+b)^{1-m}$

<u>الحل:</u>

نضع: $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$ الدالة f' تزايدية على IR^{+*} إذن :

$$1+e^{\alpha x}e^{(1-\alpha)y} \leq \left(1+e^x\right)^{\alpha}\left(1+e^y\right)^{(1-\alpha)}$$

الدالة $x \to e^x$ تقابل من IR نحو IR^{+*} نأخذ $a=e^x$ و $b=e^y$

. (c) منحنى $\ln$. بين أن لكل x من IR^{+*} : (c) محدب $\Leftrightarrow \ln(x) \leq x-1$.

الحل:

$f(x)=lin(x)$ الدالة f' تزايدية على IR^{+*} إذن : $f(x) \leq \frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln(x_0)$

لكل x و x_0 من IR^{+*} .

. (c) منحنى $\exp$. بين أن لكل x من IR : (c) مقعر $e^x \geq x+1$.

<u>8) الرتابة و النهايات .</u>

$(a,b)\in(\overline{IR})^2$ و $a\le b$, f دالة عددية تزايدية على المجال $]a,b[$.

*** إذا كانت f مكبورة ,فإن f تقبل نهاية منتهية على يسار b و**

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$$

***إذا كانت f غير مكبورة فإن :**

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$$

و نستنتج الحالات الأخرى.

- احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

الحل.

الدالة $x \longrightarrow \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ تزايدية على IR و مكبورة ($\int_0^x e^{-t^2}dt \le \int_0^1 e^{-t^2}dt + \frac{1}{e}$)

- احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}$

الحل:

الدالة $x \longrightarrow e^{x^2}$ تزايدية على IR^{+*} و غير مكبورة ($e^{x^2} \ge e^x \ge x$)

9) الرتابة و إشارة الدالة المشتقة .

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

- f ثابته على المجال I $\iff$ $f'(x)=0$ لكل x من المجال I .

- f تزايدية على المجال I $\iff$ $f'(x)\ge 0$ لكل x من المجال I .

- f تزايدية قطعا على المجال I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ لكل x من المجال I و المجموعة $\{x \in I \,/\, f'(x) = 0\}$ منتهية

- $f(x) = \sqrt{3+x^2} + \ln(x^2) - e^{-x^2}$

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في كل x غير منعدم و حدد إشارة $f'(x)$.

الحل:

الدالة f زوجية و تزايدية قطعا على المجال IR^{*+} (مجموع ثلاث دوال تزايدية) إذن $f'(x) \geq 0$ لكل x من IR^*.

10) <u>الرتابة و المتتاليات العددية</u> .

$(u_n)_n$ متتالية عددية رتيبة إذن تقبل نهاية (منتهية أو ∞) .

- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{4k-1}$.

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم احسب نهايتها .

الحل:

- المتتاليتان $(u_{2n})_{n\geq 1}$ و $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ متحاديتان و نستنتج من ذالك أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

- باعتبار المجموع $\sum_{k=1}^{k=n} x^{8k-2} - x^{8k+2}$ و التكامل $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx$ نبين أن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln(3-2\sqrt{2})\right)$$

- نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بما يلي :

$u_0 = 2$ و لكل n من IN^* : $u_{n+1} = u_n + \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}$

$v_n = \frac{u_n}{n}$

. بين ان المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ رتبية و أن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

. بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ رتيبة و أن : $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

<u>ببليوغرافيا</u>

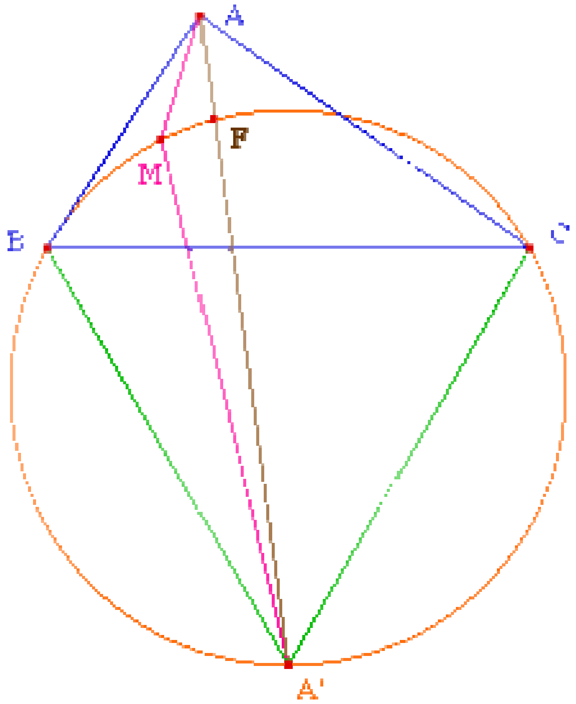
1- De Ketele J.M.et Roegiers X.. Une pédagogie de l’intégration,compétences et intégration des acquis dans l’enseignement.Bruxelles,2000.

2- Douady R.. Jeux de cadres et dialectique outil/objet. Thèse d’état :1984.

مـلـحـق :

<u>Problème de Fermat حول*</u>

Problème de Fermat : minimiser MA+MB+MC



Supposons que l'angle en A soit le plus grand. Construisons A' tel que BCA' soit équilatéral extérieur au triangle.

D'aprés l'application du théorème de Ptolémée dans cette configuration (exercice précédent), on a MB + MC ≥ MA' , avec égalite si et seulement si M appartient au petit arc BC

On a ensuite

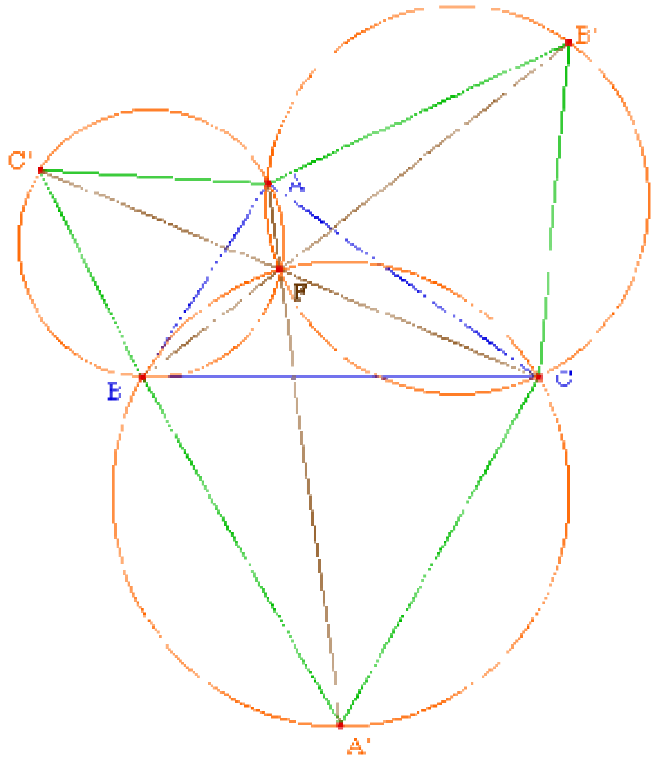
MA + MB + MC ≥ MA + MA' et

MA + MA' ≥ AA',

avec égalité si et seulement si M appartient au segment [AA'].

Le problème de Fermat est donc résolu dans le cas ou le petit arc BC et le segment [AA'] ont un point commun F, c'est-à-dire dans le cas où l'angle A est inférieur ou égal à 2π/3 Dans ce cas, le minimum est atteint en F, appelé point de Fermat du triangle ABC.

Point de Fermat et problème de Torricelli



Toujours dans le cas ou le plus grand angle est inférieur ou égal à 2π/3, on peut faire la même chose avec les triangles équilateraux extérieurs ACB' et BAC'.

Cela permet d'obtenir en prime que F est le point d'où l'on voit les trois côtés du triangle ABC sous le même angle 2π/3 (problème de Torricelli), que les segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont concourants en F, et que AA' = BB' = CC' (puisque ces trois longueurs sont égales à FA + FB + FC)

Le point F est appelé parfois "point de Torricelli"

Dans le cas où l'angle le plus grand est supérieur à 2π/3, la methode n'aboutit plus car la minoration est trop brutale : il n'y a pas de cas d'egalité. Chacun verifiera que le minimum est alors atteint en A.

Principe de Fermat :pour aller d'un point A à un point B ,la lumière suit le trajet pour lequel le chemin optique est extrémal.

La loi de Snell

Le problème de la réfraction de la lumière, lorsque celle-ci passe d'un milieu où elle se déplace à la vitesse v1 à un milieu où elle se déplace à la vitesse différente v2 peut se formuler géométriquement de la façon suivante :

Deux point A et B sont situés de part et d'autre d'une droite (D). Pour quel point M de (D) le temps de parcours $\frac{AM}{v_1}+\frac{MB}{v_2}$ est-il minimum ?

6- Le principe de Fermat :
La droite (z0z) partage le plan en deux
demi-plans P1 et P2 . Les points A et B
sont l'un dans P1, l'autre dans P2. Un
mobile part de A, effectue en ligne droite
un trajet AI, où I est un point de (z0z) à la vitesse constante v,
puis un trajet rectiligne IB à la vitesse constante u.
AH, BK et HK sont supposés connues.
Déterminer la position du point I pour lequel le temps mis par
le mobile pour effectuer le trajet AIB est minimal

مسائل تتعلق بالقيم القصوى والقيم الدنيا لمساحات أو حجوم :

1 - On considère une ficelle de longueur 24 cm avec laquelle on forme un rectangle.
Quelle est la valeur maximale de l'aire du rectangle délimité par la ficelle ? .

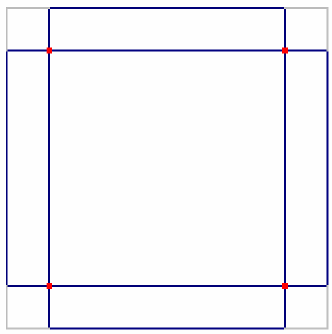
2 - On dispose d'un rouleau de grillage de 60 m pour réaliser un enclos rectangulaire .Quelle forme faut t'il donner à cet enclos pour que sa surface soit maximale ?

3 - On veut créer au bord d'une rivière un enclos rectangulaire de 1250m². On ne met pas de clôture du côté de la rivière.
Quelle est la longueur minimale du grillage ?

4 -Trouver l'aire maximale d'un trapèze isocèle dont la somme des longueurs de la petite base et des deux côtés est donnée égale à L.

5 - volume d’une boite

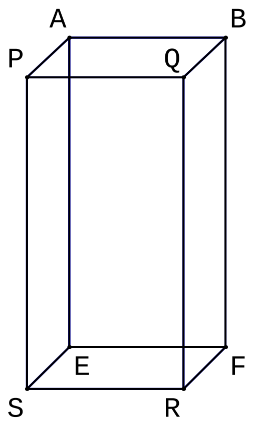
On dispose d’une plaque en métal carrée de 20 cm de côté. Pour former une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x et on relève les bords par pliag

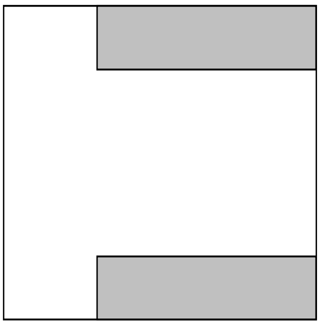


On obtient une boîte sans couvercle.

Pour quelle valeur de x, le volume de la boîte est-il maximal ?

6 - Un fabricant envisage la production d’une boîte (de lait par exemple) ayant la forme d’un parallélépipède rectangle. Il découpe dans une plaque carrée de 30 cm de côté le patron de la boîte qu’il obtient en enlevant deux bandes rectangulaires, comme sur le modele ci-dessous :





On désigne par x, y, z les dimensions de la boîte en centimètres :

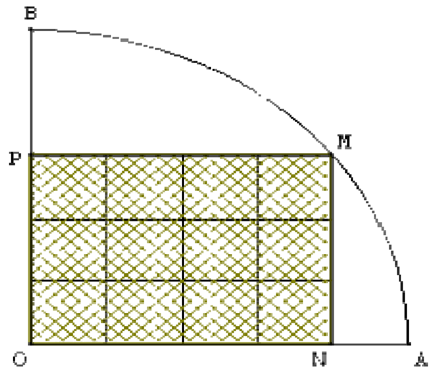
$x = BQ$, $y = AB$, $z = BF$.

Le fabricant cherche quelle valeur donner à x pour obtenir une boîte de volume V maximal.

7 - On considère un quart de cercle.

Un point M de l'arc[AB].

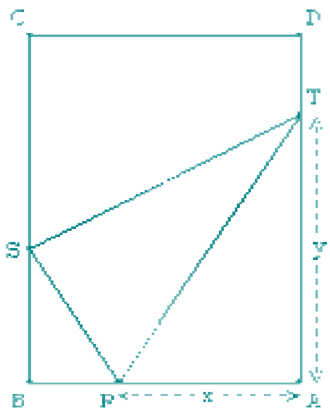
Il s'agit de déterminer la position du point M, pour laquelle l'aire du rectangle OMNP est maximale et de calculer



8 - Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).

On pose AR = x, AT = y.



1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2°) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].

3°) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?