الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية: 2006)
الموضوع

المــــادة:	الرياضيات	مدة الإنجاز:	4 س
الشعــب(ة):	العلوم الرياضية (أ و ب)	المعامل:	10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول (3,5 ن)

لتكن G مجموعة مصفوفات $M_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$

حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

0,25 — **I** ـــ 1) بين أن G جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,75 — 2) بين أن $(G,\times)$ زمرة . هل هذه الزمرة تبادلية ؟

3) لتكن H مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

0,5 — بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

0,5 — 4) ليكن A عنصرا من G حيث : $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$ $(a\in\mathbb{R})$.

نضع $A^1=A$ و $A^2=A\times A$ و $A^{n+1}=A^n\times A$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أحسب A^n بدلالة a و n حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

II ـــ نعتبر في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

لكل (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$: $(a,b)\mathrm{T}(x,y)=(a+bx,by)$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بما يلي:

$$(\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)\ \varphi\left(M_{(a,b)}\right)=(a,b)\ .$$

0,75 — 1) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\mathrm{T})$.

0,25 — 2) استنتج بنية $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\mathrm{T})$.

0,5 — 3) حدد مماثل $\underbrace{(a,1)\mathrm{T}(a,1)\mathrm{T}\ldots\ldots\ldots\mathrm{T}(a,1)}_{n\ \text{مرة}}$ في $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\mathrm{T})$ حيث a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

التمرين الثاني (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة : $(E) : \quad x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

1) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E).

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$. ($x \wedge y$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y)

أ ــ تحقق أن : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$. 0,25

ب ــ استنتج أن : $b=1$. 0,75

ج ــ بين أن : $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$. 0,5

د ــ استنتج أن : $a=2$ أو $a=3$. 0,5

2) حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . 0,5

التمرين الثالث (5 ن)

لكل عدد عقدي z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z) = z^2 - (2+6i)z$.

I – في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، نعتبر (H) مجموعة النقط M ذات اللحق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

1) بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (H) . 0,5

2) بين أن (H) هذلول وحدد مركزه و رأسيه و معادلتي مقاربيه في المعلم $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. 1

3) تحقق أن النقطة O، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة (H) ثم اكتب في المعلم $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (H) في O. 0,5

4) أنشئ (H) في المعلم $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. 0,75

II ــ 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، المعادلة : $P(z) = 4-6i$. 0,5

2) نضع $u = 1+5i$ و $v = 1+i$ و $w = 239 - i$

و نضع $\alpha = Arc\tan\dfrac{1}{5}$ و $\beta = Arc\tan\dfrac{1}{239}$.

أ ــ تحقق أن $u^4 \times v = 4w$. 0,5

ب ــ حدد بدلالة α عمدة للعدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة للعدد العقدي w . 0,75

ج ــ استنتج أن : $4Arc\tan\dfrac{1}{5} - Arc\tan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$. 0,5

.../...

التمرين الرابع (9 ن)

الجزء الأول

في هذا الجزء ، n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 3 .

نعتبر g_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x)=nx+2\ln(x)$.

0,5 — 1) ضع جدول تغيرات الدالة g_n .

0,5 — 2) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ \sqrt{x}>\ln x$.

0,75 — 3) أ ــ بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$ و أن $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

0,25 — ب ــ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

الجزء الثاني

I ــ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{x}\ e^{-x}$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$.

0,5 — 1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة صفر ثم أول هندسيا النتيجة .

0,5 — 2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة .

0,25 — 3) أ ــ بين أن : $f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)\quad(\forall x\in]0,+\infty[)$. (*)

0,25 — ب ــ ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,5 — 4) أنشئ (C) . (نأخذ $f\left(\frac{1}{3}\right)\approx 0,5$)

II ــ نضع $I=\left[\frac{1}{3},1\right]$.

0,5 — 1) أ ــ بين أن : $f(I)\subset I$.

0.5 — ب ــ باستعمال العلاقة (*) ، بين أن : $(\forall x\in I)\ |f'(x)|\le\frac{2}{3}$.

0,5 — ج ــ بين أن: $\left[(f(x)=x \text{ و } x>0)\Leftrightarrow x=\alpha_3\right]$ حيث α_3 هو حل المعادلة $g_3(x)=0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول .

2) لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_0=\frac{1}{3}\\(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

0,25 — أ ــ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\in I$.

0,5 ب ــ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$.

0,25 ج ــ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

0,5 د ــ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة محددا نهايتها .

III ــ لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\,dt$

0,25 1) أ ــ بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$.

0,75 ب ــ أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F .

0,5 2) أ ــ بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leq F(x) \leq 2f(x)\left(1 - e^{-7x}\right)$.

0,25 ب ــ استنتج $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

0,25 ج ــ ضع جدول تغيرات الدالة F .