ثانوية موسى بن نصير **مديرية الخميسات**	**تجريبي رقم 02** **دورة ماي 2017/2016**	**2 بكالوريا علوم رياضية** **ذ : عبدالله بن الختير**

مدة الإنجاز : أربع ساعات

التمرين الأول: (03 ن)

⇦ لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$a_0 = 1$ و $(\forall n\in\mathbb{N});a_{n+1} = 10a_n + 21$.

1)- أ- بين أن العددين a_1 و a_2 أوليان . 0,5

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): a_2x - a_1y = 1$ مبرزا مراحل الحل . 0,5

2)- أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N});3a_n = 10^{n+1} - 7$. 0,5

ب- استنتج أن كتابة a_n في نظمة العد العشري كما يلي : $a_n = \underbrace{33...33}_{n\ fois}1$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$. 0,5

3)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});3a_n \equiv 4 + (-1)^{n+1}\ [11]$ واستنتج أن a_n لا يقبل القسمة على 11 لكل $n\in\mathbb{N}$. 0,5

4)- بين أن a_{16n+8} يقبل القسمة على 17 لكل $n\in\mathbb{N}$ (يمكنك تطبيق مبرهنة فيرما) . 0,5

التمرين الثاني: (04 ن)

⇦ في $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ ، نضع : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

و نعتبر المجموعة الجزئية : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$.

1)- أ- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$. 0,5

ب- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(I,J)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$ و استنتج $\dim(E)$. 0,5

2)- أ- تحقق أن : $J^2 = -2I + 2J$ ، ثم استنتج أن المصفوفة J تقبل مقلوبا في E ينبغي تحديده . 0,5

ب- هل الأسرة (J^{-1},J^2) تكون أساسا للفضاء $(E,+,\cdot)$ ؟ علل جوابك . 0,25

ج- بين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,25

3)- نعتبر التطبيق : $\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to E \\ & a+ib \mapsto M(a-b,b) \end{aligned}$ و نضع $E^* = E - \{O\}$.

✓ بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ ، ثم استنتج بنية $(E^*,\times)$. 0,5

4)- أ- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي (ينبغي تحديد مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ من E^*) . 0,5

ب- حل في E المعادلة : $J\times X^3 = -4I$ (لاحظ أن : $(1+i)^3 = -2+2i$) . 0,5

5)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^* - \{1\});J^n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right).I + \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).J$. 0,5

التمرين الثالث: (03 ن)

⇦ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): z^2-\left(3+e^{i\theta}\right)z+2\left(1+e^{i\theta}\right)=0$ ، حيث $\theta\in]0,2\pi[$.

1)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي .	1
2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.	
لكل z من $\mathbb{C}^*-\{2\}$ ، نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث : $\frac{z'}{z}\in i\mathbb{R}$ و $\frac{z'-2}{z-2}\in\mathbb{R}$.	
أ- حدد z' في حالة $z=i$.	0,25
ب- حدد z' في حالة $z\in\mathbb{R}^*-\{2\}$.	0,5
ج- نفترض أن M' موجودة ، أعط طريقة هندسية تمكن من إنشاء M' انطلاقا من M .	0,5
د- حدد شرطا كافيا و لازما (يتعلق ب z لحق M) لكي تكون النقطة M' معرفة (بمعنى موجودة) .	0,75

التمرين الرابع: (10 ن)

الجزء الأول:

1)- بين أن : $\left(\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\right);\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$.	0,5
2)- بين أن : $\left(\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\right);\frac{x}{3(x+1)}\leq\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt\leq\frac{x}{2}$.	0,5
3)- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{-1}{2}$.	0,25

الجزء الثاني:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right);f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ و $f(1)=1$.

1)- احسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم أعط تأويليهما الهندسي .	0,75
2)- أ- بين أن f متصلة على $]0,+\infty[$.	0,5
ب- ادرس قابلية اشتقاق f في $x_0=1$ ، ثم أول النتيجة هندسيا (استعمل **الجزء الأول** **3)-**) .	0,5
3)- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن :	
$\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right);f'(x)=\frac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}$.	0,5
ب- بين أن : $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right);(x-1)-x\ln x<0$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .	0,5
4)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (مبرزا المماس في النقطة $A(1;f(1))$) .	0,5

5)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n\in\left]0,+\infty\right[\right);f\left(a_n\right)=1+\frac{1}{n}$.	0,25
6)- أ- تحقق أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0<a_n<1$.	0,25
ب- بين أن المتتالية $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا ، ثم استنتج أنها متقاربة .	0,5
ج- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$.	0,25
د- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-a_n\right)=2$ ، ثم استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^n=\frac{1}{e^2}$.	0,5

الجزء الثالث:

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي :	
$F\left(0\right)=0$ و $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);F\left(x\right)=\int_x^{x^2}f\left(t\right)dt$.	
1)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right);\frac{2x\ln x}{x+1}\le F\left(x\right)\le x\ln x$.	0,5
ب- بين أن F متصلة على اليمين في الصفر ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F\left(x\right)}{x}$ و أعط تأويلها الهندسي .	0,75
2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right);\ln x.\ln\left(x+1\right)\le F\left(x\right)\le 2\ln x.\ln\left(x+1\right)$.	0,5
ب- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F\left(x\right)}{x}$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .	0,75
3)- أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ و أن :	0,75
$F'\left(1\right)=1$ و $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right);F'\left(x\right)=\frac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$.	
ب- ضع جدول تغيرات F على $\left[0,+\infty\right[$ (معللا جوابك) .	0,25
4)- ارسم المنحنى $\left(C_F\right)$ في معلم متعامد و ممنظم (نعطي : $F\left(\frac{1}{3}\right)\simeq\frac{-1}{2}$) .	0,5

✓ **تمرين إضافي: (2 ن)**

⇦ ليكن b عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $b\equiv2\left[5\right]$.	
و في نظمة العد ذات الأساس b ، نعتبر العدد الصحيح الطبيعي : $a=\underbrace{11...11}_{2048\ fois}$.	
✓ بين أن العدد a يقبل القسمة على 5 .	2

انتهى الموضوع .