المركز الوطني للامتحانات

قطاع التربية الوطنية

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية: 2005)

الموضوع

المادة: الرياضيات — مدة الإنجاز: 4 ساعات
الشعبة: العلوم الرياضية (أ و ب) — المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول: (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

لكل (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$: $(a,b)*(x,y)=\left(\dfrac{ax+by}{2},\dfrac{ay+bx}{2}\right)$

لتكن المجموعة $E=\left\{\left(m+\dfrac{1}{m},m-\dfrac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 \ / \ m\in\mathbb{R}^*\right\}$.

1) بين أن $*$ قانون داخلي في المجموعة E .	0,75
2) ليكن التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $(\forall m\in\mathbb{R}^*)\quad \varphi(m)=\left(m+\dfrac{1}{m},m-\dfrac{1}{m}\right)$	
أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.	0,5
ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد ومماثل كل عنصر $\left(m+\dfrac{1}{m},m-\dfrac{1}{m}\right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .	0,75
3) نعتبر المجموعة $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\geq 2$ و $y^2=x^2-4\}$.	
أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\dfrac{1}{m},m-\dfrac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 \ / \ m>0\right\}$.	1
ب) بين أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.	1

التمرين الثاني: (3 ن)

I) p عدد صحيح طبيعي أولي اكبر أو يساوي 5 .

1) بين أن : $p^2\equiv 1\,[3]$.	0,5
2) أ) باستعمال زوجية العدد p ، بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث $p^2-1=4q(q+1)$.	0,5
ب) استنتج أن : $p^2\equiv 1\,[8]$.	0,5
3) بين أن : $p^2\equiv 1\,[24]$.	0,5

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية : 2005)

المادة: الرياضيات

الشعبة: العلوم الرياضية (أ و ب)

الموضوع:

II) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24 .

1) بين أن : $a^2 \equiv 1\,[24]$. — 0,5

2) هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 ، a_2 ، ....، a_{23} حيث : — 0,5

$a_k \wedge 24 = 1$ لكل k من $\{1,2,....,23\}$ و $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{23}^2 = 23997$ ؟

($a_k \wedge 24$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_k و 24) .

التمرين الثالث : (8,5 ن)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2 cm) .

1) أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 . — 0,25

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 . — 0,25

ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$. — 0,5

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 0,25

ب) بين أن: $0 \le e^{-t} + t - 1 \le \frac{t^2}{2}$ $\quad \forall t \ge 0$. — 0,5

ج) بين أن: $-\frac{4}{x} \le f(x) - x \le \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$ $\quad \forall x>0$. — 0,5

د) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلة له . — 0,25

3) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ). — 0,5

II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} \; ; \; x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

1) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 . — 0,25

2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$. — 0,5

3) أ) بين أن، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x)=\frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$ — 0,5

ب) بين أن: $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\; (\forall x>0)$. — 0,5

ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة . نضع $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ — 0,75

د) بين أن : $na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. | 0,25

هـ) بين أن $a=0$. | 0,5

III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$.

(f هي الدالة المعرفة في الجزء I)

1) أ) بين أن : $xf(x) \le F(x) \le xf(2x)$ $(\forall x>0)$. | 0,25

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. | 0,25

2) أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$. | 0,5

ب) بين أن : | 0,75

$$\begin{cases} F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left((x+2)(e^{\frac{1}{x}}-1)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) & ;\ x>0 \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$$

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في 0)

3) اعط جدول تغيرات الدالة F . | 0,5

التمرين الرابع: (4,5 ن)

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 ، نضع : $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$.

1) أ) حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$. | 0,25

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\ f(z)=z$. | 1

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث $\Re e(z_0)=0$ و $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$.

2) أ) تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$. | 0,5

ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2 . | 0,75

3) في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\le\alpha<\pi$.

أ) بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$. | 0,5

ب) حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$. | 0,25

ج) اكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. | 0,75

4) حدد z إذا علمت أن $\begin{cases}|z|=1\\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}$ | 0,5