Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
& de la Formation Professionnelle

Institution al inbiaat privée

Devoir $n^{\circ}2$ 1sm option biof

durée 2heures

Exercice1 (8points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{{u_n}^2}{4}}$.

1 1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

1 2. montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $0\le u_n \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1 3. montrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = {u_n}^2 - \frac{4}{3}$.

1 a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

1 b. Exprimer V_n puis u_n en fonction de n .

1 c. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} {u_k}^2$ en fonction de n.

5. Soit (T_n) la suite définie par $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = \frac{1}{4}T_n + V_n$. On pose $H_n = 4^n T_n$.

1 a. Montrer que (H_n) est une suite arithmétique de raison r=$\frac{-16}{3}$.

1 b. Exprimer H_n puis T_n en fonction de n.

Exercice (7points)

Soit f la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ dont la courbe ainsi que la droite d'équation y=x est donnée en annexe et à rendre avec la copie.

1. Soit(u_n) la suite définie pa $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1 a. Placer les trois premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

0.5 b. Quelle conjecture peut –on émettre quant à la monotonie de la suite (u_n)

1 2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1<u_n$.

1.5 3. Montrer par le calcul que $\forall x \ge 1, on\ a\ f(x) \le x$. Et on déduire que la suite (u_n) est décroissante.

1.5 4. Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$ .En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,$0< u_n - 1 \le 3(\frac{1}{2})^n$.

1.5 5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$,$n \in \mathbb{N}$-{0} . Montrer que n<$S_n \le n + 3(1-(\frac{1}{2})^n)$

Exercice3 (classique)(5points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

1 1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $1<u_n$.

1 2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire que (u_n) est bornée.

3. On pose$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1 a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

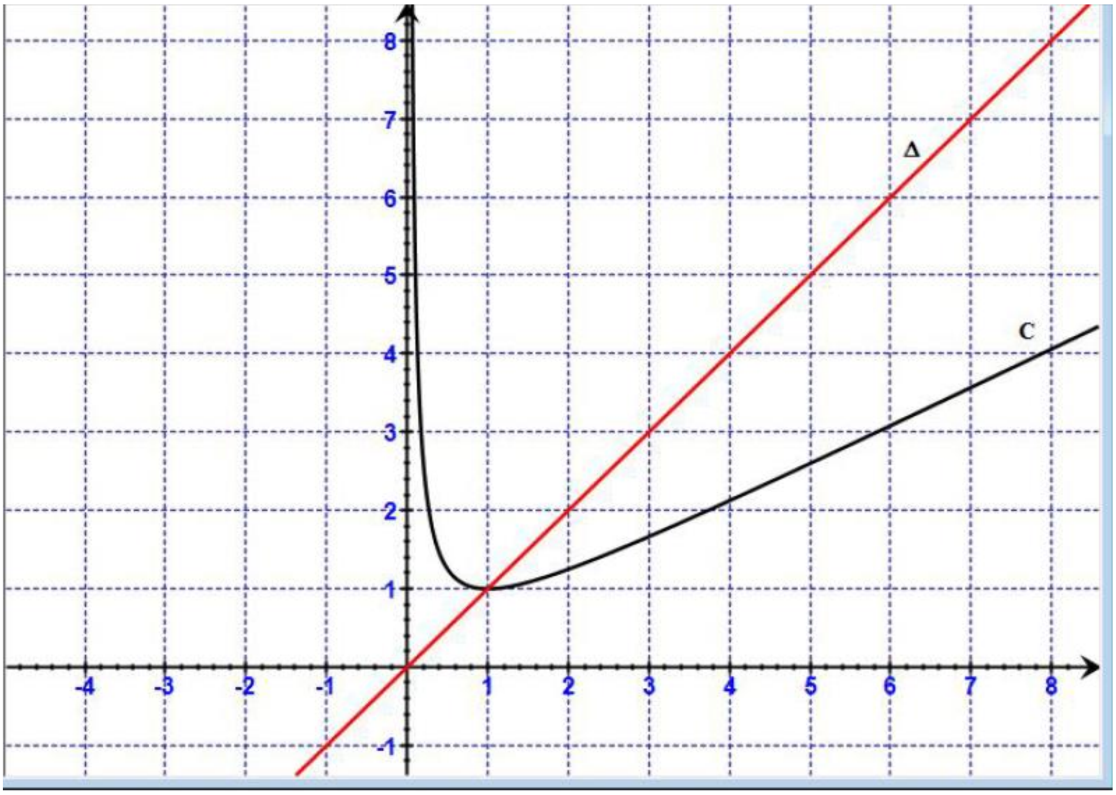
1 b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

1 c. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ en déduire $\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{u_k+2})$.

Bonus.

Soit x un réel montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ est croissante .

Et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$ est décroissante.



Δ
C