Exercice 1: (3,5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire de zéro la matrice* $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et d'unité la matrice* $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et que* $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ *est un espace vectoriel réel de dimension* 4. *Pour tout couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *,on pose* $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ *et on considère l'ensemble* $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,5 1. *Montrer que* E *est un sous-groupe du groupe* $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0,5 2. (a) *Montrer que* E *est un sous-espace de l'espace vectoriel de* $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,25 (b) *Montrer que l'espace vectoriel* $(E,+,.)$ *est de dimension* 2.

0,25 3. (a) *Montrer que* E *est stable pour la loi "* $\times$ *" .*

0,5 (b) *Montrer que* $(E,+,\times)$ *est un anneau commutatif.*

4. *On définit dans* $M_2(R)$ *la loi de composition interne* T *par : pour tous* $M(x,y)$ *et* $M(x',y')$ *de* $M_2(R)$,
$M(x,y)\,T\,M(x',y')=M(x,y)\times M(x',y')-M(y,0)\times M(y',0)$
Et soit φ *l'application de* $\mathbb{C}^*$ *vers* E *qui à tout nombre complexe* $x+iy$ *(où* $(x,y)\in R^2$ *) fait correspondre la matrice* $M(x,y)$ *de* E .

0,25 (a) *Montrer que* E *est stable pour la loi "*T*".*

0,25 (b) *Montrer que* φ *est un homomorphisme de* $(\mathbb{C}^*,\times)$ *vers* (E,T) .

0,25 (c) *On pose* $E^*=E-\{O\}$. *Montrer que* (E^*,T) *est un groupe commutatif.*

0,5 5. (a) *Montrer que la loi "*T*" est distributive par rapport à la loi "* $+$ *" dans* E.

0,25 (b) *Montrer que* $(E,+,T)$ *est un corps commutatif.*

Exercice 2: (3,5 points)

1. *Pour tout nombre complexe* $z\in\mathbb{C}-\{i\}$ *on pose :* $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$.

0,5 (a) *Vérifier que* $h(z)=z\Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$.

0,5 (b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): z^2-2iz-2=0$.

2. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
On note a *et* b *les deux solutions de l'équation* (E) *tels que* $\mathrm{Re}(a)=1$. *Et pour tout* $z\in\mathbb{C}-\{i,a,b\}$ *on note* $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ *et* $B(b)$ *les points d'affixes respectives* z , $h(z)$, a *et* b .

0,75 (a) *Montrer que* $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=\dfrac{z-a}{z-b}$.

0,75 (b) *En déduire que* $\left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$.

0,5 3. (a) *Montrer que si les les points* M , A *et* B *sont alignés alors les points* M , A, B *et* M' *sont alignés.*

0,5 (b) *Montrer que si les les points* M , A *et* B *ne sont pas alignés alors les points* M , A , B *et* M' *sont cocycliques.*

Exercice 3: (3 points)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "Pile" (le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10).

1 1. (a) *Déterminer les valeurs prises par X.*

1 (b) *Déterminer la probabilité de l'événement $[X = \frac{1}{2}]$.*

1 2. *Quelle est la probabilité que X soit supérieur ou égal à $\frac{9}{10}$.*

Exercice 4: (10 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 & si \quad x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ *et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

0,5 1. (a) *Montrer que f est continue à droite en 0.(On pourra remarquer que $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$).*

0,75 (b) *Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0,75 2. (a) *Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0,75 (b) *Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \succ 0$.*

1 (c) *Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et en déduire que $(\forall x \in]0;1]) : 0 \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^2 \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$.*

0,5 (d) *Tracer la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.(On prendra pour unité 2cm).*

3. *Pour tout réel $x \geqslant 0$ on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$.*

0,5 (a) *Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.*

1 (b) *Calculer $F'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ et en déduire le sens de variations de F sur $[0;+\infty[$.*

0,75 4. (a) *En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_x^1 \sqrt{t}(\ln t)\,dt$ pour tout $x \succ 0$.*

0,75 (b) *Montrer que pour tout $x \succ 0$: $F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}\sqrt{x}(\ln x) - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$.*

1 (c) *En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.*

5. *Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.*

1 (a) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et strictement monotone.*

0,75 (b) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*