تمرين1

1. احسب النهايات التالية $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{\cos t}dt$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt$ و $\lim\limits_{x\to e}\frac{1}{x-e}\int_e^x Arc\tan(\ln t)dt$

2. احسب ما يلي $\int_{-1}^1|x|\,dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$ و $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)\cos(4x)\,dx$ و $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2dx$ و $\int_0^1 Arc\tan x\,dx$ و $\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$ و $\int_0^1 x^2\sin 3x\,dx$.

3. مستعملا مكاملة بتغيير المتغير احسب
$\int_1^e(\ln x)^2dx$ ضع $t=\ln x$ و $\int_0^1\sqrt[n]{x+1}\,dx$ ضع $t=\sqrt[n]{x+1}$ و $n\in IN^*$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$ ضع $t=\tan\frac{x}{2}$ و $\int_0^1\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ ضع $t=\sqrt{x}$.

تمرين2

جزء1

نعتبر الدالتين المعرفتين علىℝ بما يلي
$\forall x\in IR\ f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}$ و $\forall x\in IR\ F(x)=\int_{-x}^x\frac{dt}{1+t^4}$.

1. بين ان f قابلة للاشتقاق علىℝ وحدد $f'(x)$ لكل x من ℝ.
2. ادرس رتابة f على ℝ.
3. بين ان $\lim\limits_0\frac{f(x)}{x}=1$.
4. بين ان F دالة فردية.
5. بين ان $\forall x\in IR\ \ F(x)=2f(x)$ واستنتج تغيرات الدالة F .

جزء2

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي
$\forall n\ge1\quad u_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$.

1. احسب u_1 و u_2.
2. ادرس رتابة $(u_n)_{n\ge1}$ وبين انها محدودة.
3. بين ان $\forall n\ge1\quad 1-u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.
4. استنتج ان $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة واحسب نهايتها.

جزء3

في هذا الجزء نعتبر المستوى منسوبا الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. ماذا تمثل u_4 هندسيا .
2. احسب u_4.
3. احسب ب cm^3 حجم مجسم الدوران المولد بدوران منحنى f حول محور الافاصيل على القطعة$[0,1]$ خذ $\|\vec{i}\|=2cm$.

تمرين3

جزء1

ليكن r عددا حقيقيا موجبا قطعا .

1. بين ان $\int_n^{n+1}\frac{1}{x^r}dx\le\frac{1}{n^r}\le\int_{n-1}^n\frac{1}{x^r}dx$ $\forall n\in IN\ n\ge2$
2. لكل n من IN^* نضع $S_n=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots+\frac{1}{n^r}$.

أ. بين ان $\int_1^{n+1}\frac{1}{x^r}dx\le S_n\le1+\int_1^n\frac{1}{x^r}dx$ $\forall n\ge1$

ب. ادرس تقارب المتتالية $(S_n)_{n\ge1}$ حسب قيم r .

3. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة ب $\forall n\ge1\ v_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n)$.
بين ان $(v_n)_{n\ge1}$ متقاربة وان نهايتها c تحقق $0\le c\le1$.

جزء2

لتكن f دالة متصلة وتناقصية على المجال $[1,+\infty[$ وموجبة عليه.

1. بين ان $\int_n^{n+1}f(x)dx\le f(n)\le\int_{n-1}^n f(x)dx$ $\forall n\in IN\ n\ge2$
2. لكل n من IN^* نضع $F_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

أ. بين ان $\int_1^{n+1}f(x)dx\le F_n\le f(1)+\int_1^n f(x)dx$ $\forall n\ge1$.

ب. استنتج ان $F_n-f(1)\le\int_1^n f(x)dx\le F_{n-1}$ $\forall n\ge2$.

3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي
$\forall n\ge1\quad u_n=\int_1^n f(x)dx$
بين ان المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(F_n)_{n\ge1}$ من نفس النوع.

تمرين4

احسب النهايات التالية

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{n}{n^2+k^2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^n\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e x^n\ln(x)dx$

تمرين5:

جزء1

1. احسب التكامل $\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$ حيث $x \in IR^+$.

1.2. اثبت ان $\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x}$ $\forall x \in IR^+$.

ب. استنتج ان $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$ $\forall x \in IR^+$.

3. اثبت ان

$$\forall x \in IR^+ \quad x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

جزء2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} -1+e^{\frac{-2Arctanx}{\pi}}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)-x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. بين ان f متصلة على IR
2. ادرس قابلية اشتقاق f في 0 واول النتائج المحصلة مبيانيا.
3. ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).
4. حدد f' الدالة المشتقة للدالة f.
5. ادرس تغيرات الدالة f .
6. بين ان f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده وحدد قصور التقابل العكسي على IR^-.
7. ارسم (C). خد $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $e \approx 2{,}7$.
8. احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) والمستقيمات دات المعادلات $x=0$ و $x=-1$ و $y=0$

جزء3

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي

$F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^3} f(t)\,dt$ $\forall x \succ 0$ و $F(0)=0$. وليكن (C') منحناها في المستوى المنسوب الى المعلم السابق.

1. ادرس اتصال F في العدد 0 على اليمين.
2. ا. ادرس قابلية اشتقاق F في العدد 0 على اليمين واول مبيانيا النتيجة المحصلة.

ب. بين ان قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وحدد F' .

ج. ادرس رتابة F على المجال $[0,1]$.

3. بين ان $\lim_{x\to+\infty} F(x)+x^6 = +\infty$

تمرين6 : جزء1

لتكن f دالة متصلة على مجال I و u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $u(IR)\subset I$ و $v(IR)\subset I$. نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

1. تاكد ان F معرفة على $\mathbb{R}$.
2. بين ان F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

جزء2

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,1[$ بما يلي $\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

1. بين ان g متصلة على المجال $[0,1[$
2. نضع $u(x)=x$ و $v(x)=x^2$ و $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ و $I=]0,1[$ (رموز الجزء الاول) .

أ. تاكد ان F معرفة على المجال I .

ب. احسب $F'(x)$ لكل x من I .

3. لكل x من المجال I نعتبر $c \in]x^2,x[$

أ. بين ان

$$\frac{x(x-1)}{2\ln x} \prec \frac{x(x-1)}{\ln c} \prec \frac{x(x-1)}{\ln x}$$

ب. باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة استنتج ان $\lim_{x\to 0^+} F(x)=0$

4. نضع $\forall x \in I \quad h(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

بين ان $\forall x \in I \quad h(x)=F(x)$

5. ا. بين ان $\forall x \in I \quad F(x)=\ln 2+\int_x^{x^2} \frac{g(t)}{t}\,dt$

ب.استنتج ان

$$\forall x \in I \quad \frac{x+1}{2x}.\frac{(x-1)^2}{\ln x} \leq F(x)-\ln(2) \leq \frac{(x-1)^2}{\ln x}$$

ج. احسب $\lim_{x\to 1^-} F(x)$

6. احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_g) والمستقيمات دات المعادلات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$.