التنقيط

التمرين الأول: (6,75ن) . في المستوى العقدي (P) المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$, نعتبر النقطتين A و B لحقاهما على التوالي a و 1 بحيث a عدد عقدي يخالف 1 . ليكن F التحويل المعرف على $(P)\setminus\{B\}$ و الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بالعلاقة: $(*):\ z'=\dfrac{z-a}{m-1}$ و m بارامتر عقدي يخالف 1.

1) حدد طبيعة التحويل F في الحالات الثلاث الآتية : أ- $m=2$, ب- $m=-1$, ج- $m=1+i$. 0,75

انتبه : في كل ما سيأتي , نأخذ $m=z$ في العلاقة $(*)$.

2) أ- حدد شرطا هندسيا لكي يكون العدد z' عددا حقيقا . 0,25
ب- بين أن ألحاق النقط الصامدة بالتحويل F هي حلول للمعادلة : $(E): z^2-2z+a=0$. 0,25
3) نأخذ : $a=1+e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.
أ- حدد الحلين z_1 و z_2 المعادلة (E) وتحقق أن $|z_1-z_2|=2$. 1
ب- اعط الحلين على الشكل المثلثي . 0,75
4) نأخذ : $a=-1$ و $M'(z')$ صورة نقطة $M(z)$ بالتحويل F .
أ- بين أن : $\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BM})}+\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BM'})}\equiv 0[2\pi]$. 0,75
ب- استنتج أن نصف المستقيم $[BA)$ هو منصف للزاوية $\overline{(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'})}$. 0,5
ج- بين أن : (z' تخيلي صرف) $\Leftrightarrow$ ($|z|=1$) . 0,5
د- استنتج انشاءا للنقطة M' صورة نقطة M من الدائرة المثلثية بالتحويل F . 0,5
5) نأخذ : $a=i$.
أ- بين أن : ($(z-1)$ جذر مربع للعد $(1-i)$) $\Leftrightarrow$ (z حل للمعادلة (E)) . 0,25
ب- مستعملا أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0 ,5

التمرين الثاني: (8,5ن). لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} \\ f(0)=0 \end{cases}$

و (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.(نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$) .

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا . 0,5
ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر , ثم أول النتيجة هندسيا. 0,75
ج- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ وأن : $\forall x\geq 0: x^3e^{\frac{1}{x}}f'(x)=1$ 0,75

التنقيط

د- أدرس تغيرات الدالة f وضع جدول التغيرات . 0,5

ه- بين أن $\left(C_f\right)$ تقبل نقطة انعطاف I نحدد أفصولها. 0,5

2) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده .ليكن $\left(C_{f^{-1}}\right)$منحناها . 0,25

ب- بين أن المعادلة $f\left(x\right)=\dfrac{1}{n}$ حيث $n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$, تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\left]0;+\infty\right[$. 0,25

ج- أنشئ $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{f^{-1}}\right)$ في نفس المعلم . 0,75

3) ليكن x عنصرا من المجال $\left[0;1\right]$.

أ- أحسب التكامل : $G\left(x\right)=\int_x^1 tf'\left(t\right)dt$. 0,5

ب- نضع : $F\left(x\right)=\int_x^1 f\left(t\right)dt$.حدد بدلالة x قيمة التعبير $F\left(x\right)+G\left(x\right)$. 0,5

ج- استنتج $F\left(x\right)$ بدلالة x و $A\left(f\right)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ ومحور الافاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=1$. 0,75

4) لكل x من المجال $\left[2;+\infty\right[$, نعتبر الدالة : $H\left(x\right)=\int_{\frac{1}{x}}^1 tf\left(t\right)dt$.

أ- بين أن H قابلة للاشتقاق على المجال $\left[2;+\infty\right[$, ثم أحسب $H'\left(x\right)$. 0,75

ب- بين أن : $\forall x\in\left[2;+\infty\right[:\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-x}\leq H\left(x\right)\leq 2e^{-1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. 0,5

5) نعتبر المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 2}$ حيث الأعداد α_n هي تلك المحددة في السؤال 2)ب- .

أ- بين أن $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية ومتقاربة . 0,75

ب- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$. 0,25

ج- بين أن : $\lim\left(\alpha_n\ln\left(n\right)\right)=1$. 0,25

<u>التمرين الثالث: (3,75ن).</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f\left(x\right)=e^{2x}-2e^x$.

1) أدرس تغيرات f وتغيرات دالتها المشتقة f' . 0,5

2) لتكن F الدالة المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{f\left(t\right)}{t}dt \\ F(0)=-\ln\left(2\right) \end{cases}$

أ- باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية ,بين أن : $\forall x\succ 0:0\prec\dfrac{f\left(x\right)+1}{x}\prec f'\left(x\right)$. 0,5

ب-بين أن : $\forall x\succ 0:0\prec F\left(x\right)+\ln\left(2\right)\prec f\left(2x\right)-f\left(x\right)$ 0,5

ج- استنتج اتصال وقابلية اشتقاق الدالة F على اليمين في الصفر وأن $F'\left(0\right)=0$. 0,75

التنقيط	
0,25	3) أ- تحقق أن : $\forall x \succ 0 : F(x) \succ f(x)\ln(2)$.
0,5	ب- أدرس الفروع اللانهائية للدالة F بجوار $+\infty$.
0,5	4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن : $F'(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$.
0,25	ب- ضع جدول تغيرات الدالة F .
	التمرين الرابع(1ن) : I) ليكن $\omega = e^{\frac{i2\pi}{7}}$, نعتبر العددين العقديين : $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ و $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
0,25	1) بين أن $\operatorname{Im}(A) \succ 0$.
0,75	2) أحسب العددين A و B .(نعطي النتيجتين على شكليهما الجبري).
	II) 1) نعتبر التكامل $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1} \sin t dt$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
0,5	بين أن : $I_{n+2} + (n+2)(n+3) I_n = (n+3)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+2}$ لكل n طبيعي غير منعدم .
0,5	2) أحسب التكامل : $\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2} dx$.

(أسئلة التمرين الرابع مستقلة فيما بينها)

السعادة ترتبط دائما بمجهود فكري.

(باشلار-عالم فرنسي)

يؤخذ بعين الاعتبار خلال التصحيح :

- دقة ووضوح الانشاء الرياضي.
- نظافة العمل من التشطيب والاوساخ؟
- ترجع الاوراق حاملة للأرقام الترتيبية للتلاميذ ومرتبة حسب تسلسل التمارين المنجزة.