**تمرين1** حدد نهايات المتتاليات التالية $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[2009]{n}}\right)_{n\ge1}$ و $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\ge0}$

$\left(\frac{\arctan(\sqrt{n})}{n^{2008}}\right)_{n\ge1}$ , $\left(\frac{\left(\sin\left(\sqrt[2010]{n}\right)\right)^n}{n}\right)_{n\ge1}$ و $\left(-n^2+\cos\left(\sqrt[3]{n}\right)\right)_n$ و

$\left(n^3+\sin^6\left(n+\sqrt[7]{n}\right)\right)$ و $\left(n-\sqrt[3]{n^3+n-1}\right)$ .

**تمرين2** 1.نعتبر المتتاليات المعرفة بما يلي

$$\forall n\in IN\; w_n=1+\frac12+\frac13+...+\frac1n,\; a_n=1+\frac1{2^2}+\frac1{3^2}+...+\frac1{n^2}$$

$$\forall n\in IN^*\; v_n=1+\frac1{\sqrt2}+\frac1{\sqrt3}+...+\frac1{\sqrt n},\; \forall n\in IN\; u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt n$$

ا.بين ان $\forall n\ge1\quad 0\le u_n\le\frac1{2\sqrt n}$ وان $\forall k\ge2\quad \frac1{k^2}\le\frac1{k(k-1)}$

ب.ادرس رتابة المتتاليات السابقة واستنتج دراسة لتقارب المتتالية $(u_n)_n$ ثم حدد نهايتها.

ج.مستعملا السؤال ا. بين ان $(v_n)_{n\ge1}$ غيرمكبورة وادرس تقاربها ثم برهن ان $(a_n)_{n\ge1}$ متقاربة واطر نهايتها.

د. بين ان $\forall n\in IN^*\quad w_{2n}\ge\frac12+w_n$ وان $\lim_n w_n=+\infty$ (يمكن استعمال برهان بالخلف).

2.ليكن $r\in Q, q\in IR$ نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$$\forall n\in IN^*\; b_n=1+q+q^2+...+q^n,\; c_n=1+\frac1{2^r}+\frac1{3^r}+...+\frac1{n^r}$$

ا. ادرس تقارب المتتالية $(b_n)_{n\ge1}$ وحدد نهايتها عند وجودها بدلالة العدد الحقيقيq .

ب. برهن ان $\forall n\in IN^*\ \forall r\succ1\ c_n\le\sum_{k=0}^n \left(2^{1-r}\right)^k$ .

ج. استنتج.

**تمرين3. 1.** نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي

$$\forall n\in IN\ u_{n+1}=\frac12\left(u_n+\frac5{u_n}\right), u_0=1$$

ا. بين بالترجع ان $\forall n\in IN\ u_n\succ0$ وان $\forall n\in IN^*, u_n\ge\sqrt5$ .

ب. ادرس رتابة $(u_n)$ وتقاربها.

ج. نضع $\forall n\ge1\ v_n=u_n-\sqrt5$ بين ان $\forall n\ge1\ v_n=\frac{v_{n-1}}2-\frac{\sqrt5 v_{n-1}}{2u_{n-1}}$ ثم

استنتج ان $\forall n\ge2, v_n\le\frac{v_{n-1}}2$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)$.

د. باستعمال الدالة **f** المعرفة ب $\forall x\ne0,\ f(x)=\frac{x^2+5}{2x}$ اوجد نهاية $(u_n)$.

2. ليكن **a** و**b** عددين حقيقيين موجبين قطعا. نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي

$$\forall n\in IN, u_{n+1}=\frac12\left(u_n+\frac a{u_n}\right), u_0=b$$

ا. بين ان $\forall n\ge1, u_n\ge\sqrt a$ .

ب. ادرس رتابة هده المتتالية وتقاربها.

ج. نضع $\forall n\in IN, v_n=u_n-\sqrt a$ بين ان

$\forall n\ge1, v_n\le\left(\frac12\right)^{n-1}v_1$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$.

3. استنتج.

**تمرين4.**

ليكن $x$ عددا حقيقيا .

1. بين ان $\forall n\in IN^*, 0\le E(nx)-nE(x)\le n-1$.

2. نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$\forall n\ge0, v_n=u_n+\frac1{5^n}, u_n=\frac{E(5^nx)}{5^n}$ .

ا. حدد $u_0$ و$v_0$ ثم بين ان $\forall n\in IN, (u_n,v_n)\in Q^2$

ب. بين ان $\forall n\in IN, u_n\le x\prec v_n$ .

ج. برهن ان$(u_n)$و$(v_n)$ متحاديتان ثم حدد النهاية المشتركة لهما.

د. لتكن $(w_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي

$\forall n\ge1, w_n=5^n(u_n-u_{n-1}), w_0=u_0$. بين ان

$\forall n\ge1, 0\le w_n\prec5$ و $\lim_n\sum_{k=0}^n\frac{w_k}{5^k}=x$ .

3. ليكن $p$ عددا صحيحا طبيعيا حيث $p\ge2$ . نعتبر المتتاليات العددية المعرفة بما يلي $\forall n\in IN, b_n=a_n+\frac1{p^n}, a_n=\frac{E(p^nx)}{p^n}$

$\forall n\in IN^*, c_n=p^n(a_n-a_{n-1})$

ا. بين ان $\forall n\ge0, a_n\le x\le b_n$ .

ب. برهن ان$(a_n)$و$(b_n)$ متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة.

ج. بين ان $\forall n\ge1, a_n=\sum_{k=0}^n\frac{c_k}{p^k}$ وان $c_{n+1}\in\{0,1,2,...,p-1\}$

4. استنتج.

**تمرين5.** نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$\forall n\ge0, u_{n+1}=\sqrt[3]{9(u_n-1)}, u_0=2$ و

$\forall n\ge0, v_{n+1}=\sqrt[3]{9(v_n-1)}, v_0=3$ .

1. بين ان$(u_n)$ تزايدية وان $(v_n)$ تناقصية.
2. نعتبر الدالة المعرفة بما يلي $\forall x\ge1,\ f(x)=\sqrt[3]{9(x-1)}$

أ. بين ان $\forall(x,y)\in[2,3]^2, |f(x)-f(y)|\le\frac{|x-y|}{\sqrt[3]3}$ .

ب. استنتج ان $\forall n\ge1, 0\prec v_n-u_n\prec3^{\frac{-n}3}$ .

3. بين ان $\forall n\in IN, 2\prec v_n\le3$ .
4. استنتج ان$(u_n)$و$(v_n)$ متحاديتان وان نهايتهما المشتركة حل للمعادلة $x^3-9x+9=0$ في مجموعة الاعداد الحقيقية.

| | |
|---|---|
| | |