Professeur : RACHID FANIDI

L'année Scolaire :2021-2022

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Généralités des fonctions

Série 02

1BAC SMF-2

المديرية الإقليمية بتيزنيت
الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
جهة سوس ماسة

EXERCICE 01

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{5+x}-\sqrt{2-x}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+7x}{2|x|-3}$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-5x+6}}$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+x+1}$

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+5x+4}; x\leq -2 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}; x\succ -2 \end{cases}$

7) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$

8) $f(x)=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}$

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

10) $f(x)=\dfrac{|x|-5}{\sqrt{9-x^2}}$

11) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$

12) $f(x)=\dfrac{x+9}{\sqrt{x}-1}$

EXERCICE 02

On considère la function numérique f définie par:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de definition de f.

2) Etudier le signe de la function f sur D_f.

3) a-Montrer que la function f est majorée par $\dfrac{2}{3}$ .Le Nombre $\dfrac{2}{3}$ est-il la valeur maximale absolue de f?

b-En déduire que la function f est bornée sur D_f.

EXERCICE 03

Soit f la function définie sur $I=]-1;+\infty[$ par:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

1)a-Montrer que f est minorée par 4 .

b-le nombre 4 est-il la valeur minimale de f ? justifier la réponse.

2) Montrer que la fonction f n'est pas majorée sur I.

EXERCICE 04

1) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ Par : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

a-Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$.

b-Montrer que f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{x-E(x)}{x}$$

a-Déterminer D_g l'ensemble de definition de f.

b-Montrer que la fonction g est bornée sur D_g.

EXERCICE 05

Les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5;6]$ Sont données par le tableau suivant:

x	-5		-2		1		6
$f(x)$	3	↘	1	↗	7	↘	2

1) Déterminer $f([-5;-2])$ et $f([1;7])$

2) à partir de ce tableau ,déterminer tableau des variations de la fonction g dans chacun des cas suivants :

a- $g(x)=2f(x)+1$

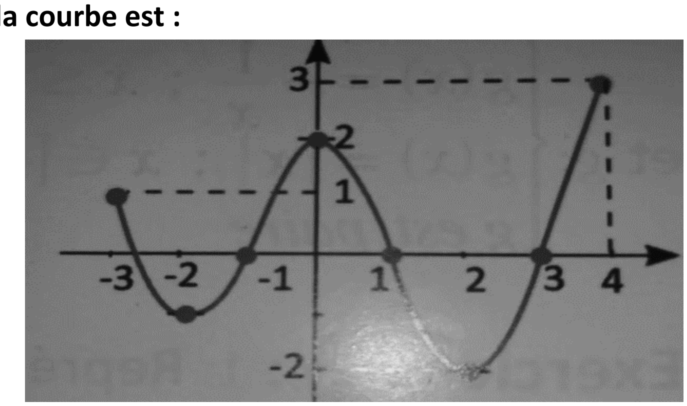
b- $g(x)=-3f(x)+1$

c- $g(x)=(f(x))^2$

d- $g(x)=\sqrt{f(x)}$

EXERCICE 06

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I=[-3;4]$ dont la courbe est :



1) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I .
2) Déterminer les extremums de la fonction f , puis le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$
3) Déterminer graphiquement : $f([-2;0])$ et $f([-3;-2])$ et $f(]0;2[)$ et $f([-3;4])$.

EXERCICE 07

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x)=-x^2+2x+1 \ et \ \ g(x)=\sqrt{x-1}$$

Et soient $(C_f)\ et(C_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Vérifier que $(C_f)\ et(C_g)$ sont sécantes en un point $A(2;1)$.
2) Représenter les courbes $(C_f)\ et(C_g)$ sur le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
3) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x^2-2x-1+\sqrt{x-1}<0$$

4) Déterminer graphiquement

$$f([0;1]) \text{ et } \ f([1;2])$$

5) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=\sqrt{2x-x^2}$$

a-Déterminer l'ensemble de définition de h .

b-Vérifier que : $h(x)=gof(x)$; $(\forall x\epsilon D_h)$.

c-Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

EXERCICE 08

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x)=\sqrt{x-1}et \ \ g(x)=\frac{2x}{x-1}$$

Et soient $(C_f)\ et(C_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Déterminer D_f ;puis Dresser le tableaux de variations de la fonction f.
2) Déterminer D_g ;puis Dresser le tableaux de variations de la fonction g.
3)a-Construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

b-Déterminer graphiquement :

$$f([1;2[) \text{ et } \ f(]2;+\infty[)$$

4) On considère la fonction numérique h définie par:

$$h(x)=gof(x)$$

a-Montrer que $D_h=[1;2[\cup]2;+\infty[$.

b-Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

c-Etudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $[1;2[$ et $]2;+\infty[$.

d-Dresser le tableau de variations de h puis en déduire une comparaison des nombres $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

EXERCICE 09

On considère les fonctions f et g définies par:

$$f(x)=\sqrt{x+2} \quad et \quad g(x)=\frac{3x}{2x-1}$$

Et soient $(C_f)\ et(C_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Déterminer D_f et D_g.
2) Montrer que $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points aux courbes $(C_f)\ et(C_g)$.
3)Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g.
4) Construire les courbes $(C_f)\ et(C_g)$ sur le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
5) Résoudre graphiquement les inéquations :

$$\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}<0 \ \ et \ \ \frac{3x}{2x-1}\sqrt{x+2}\leq 0$$

6) On considère la fonction h définie par :

$$h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$$

a-Vérifier que : $D_h=\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$ et que pour tout $x\epsilon D_h$: $h(x)=gof(x)$.

b- Déterminer graphiquement :

$$f\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right) \ et \ f\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$$

c-Déterminer la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$ et $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$;puis dresser le tableau de variations de la fonction h.

d-Déterminer la valeur maximale de la fonction h sur l'intervalle $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$.

e-Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[: h(x)\succ\frac{3}{2}$

EXERCICE 10

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Montrer que la fonction f est minorée par 2.
3) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\sqrt{x-2}$.

a-Dresser le tableau de variations de la fonction h puis tracer la courbe (C_h) dans un repère orthonormé.

b-Déterminer $h([2;3])$ et $h([3;+\infty[)$.

4)a-Déterminer un polynôme du second degré g tel que : $(\forall x\in D_f)\ f(x)=goh(x)$.

b-En déduire les variations de la fonction f.

c-Dresser le tableau de variations de la fonction $\frac{1}{f}$.

EXERCICE 11

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x \text{ et } g(x)=\sqrt{x-2}$$

Et soient $(C_f)\ et(C_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que les courbes $(C_f)\ et(C_g)$ sont sécantes aux points $A(2;0)$ et $B(3;1)$.

2) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g.

3) Construire les courbes $(C_f)\ et(C_g)$ sur le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) Déterminer graphiquement :

$$g([2;3]) \text{ et } g([3;+\infty[)$$

5)Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[2;+\infty[$

L'inéquation $\sqrt{x-2}\leq\frac{1}{3}\left(x^2-2x\right)$.

6) Soit h la fonction définie par : $h(x)=fog(x)$.

a-Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b-Etudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $[2;3]$ et $[3;+\infty[$; puis dresser le tableau de variations de la fonction h.

c- Déterminer la valeur maximale absolue de la fonction h sur D_h.

EXERCICE 12

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3 \text{ et } g(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

Et soient $(C_f)\ et(C_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser le tableau de variations de f et g .

2) a-Montrer que $(C_f)\ et(C_g)$ sont sécantes en deux points $I(2\,;4)$ et $J\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

b-Construire les courbes $(C_f)\ et(C_g)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3)a-Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\geq f(x)$

b- Déterminer graphiquement $f([2;+\infty[)$.

4)on considère la fonction h définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par:

$$h(x)=\frac{x^3+4}{x^3-2}$$

a-Vérifier que $(\forall x\epsilon[2;+\infty[);h(x)=(gof)(x)$.

b-Déterminer les variations de la fonction h à partir des variations des fonctions f et g sur $[2;+\infty[$

c-En déduire que:

$$\forall x\epsilon[2;+\infty[\,;\ \frac{x^3+4}{x^3-2}\leq 2$$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$$

1)Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$.

2)Montrer que la fonction f est périodique de période 1.

3) a-Montrer que pour tout $x\in[0;1[$:

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

b-Tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-1;3[$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=1+\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}$$

Et soit (C_f) la courbe respective de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$.

2) Montrer que le nombre 4 est une période de la fonction f.

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});1\leq f(x)<3$.

4)a-Vérifier que pour tout $x\in[0;4[$: $f(x)=1+\sqrt{x}$.

b- Tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-4;8[$

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(-1)^{E(x)}\left(x-E(x)-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

Et soit (C_f) la courbe respective de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que le nombre 2 est une période de la fonction f.

2) Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x\in[0;1[$ Puis pour tout $x\in[1;2[$.

3) Tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-6;6[$.

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $E(3x)=x+1$

2) $E(x)+|x-1|=x+3$

3) $2x-E(x)\leq 2x+1$

4) $E(x)\geq -2$

5) $2E(x)+3<0$

6) $\frac{1}{2}\leq\frac{E(x)}{2}+1<\frac{5}{2}$

7) $E\left(\frac{3x-2}{5}\right)=1$

8) $-1\leq E(x)<3$

9) $-1<E(2x)<1$