الأولى بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 03	ثانوية ابن غازي التأهيلية
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الأولى 2012/2011	نيابة الرباط

■ التمرين رقم 01: $(02pts)$

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = \sqrt{u_n^{\,2} + 2n + 3} \; .$$

▪ بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية ، ثم أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

■ التمرين رقم 02: $(06pts)$

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \; .$$

1)- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n > 1$.

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا ، ثم إستنتج أنها مكبورة .

3)- لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r = 1$.

ب- عبر عن الحدين v_n ثم u_n بدلالة n لكل $n \in \mathbb{N}$.

4)- نفترض أن $u_0 \neq 2$ ، ما هي قيمة u_0 التي من أجلها تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة .

■ التمرين رقم 03: $(07pts)$

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; v_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \; ; \; v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} .$$

و لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع : $d_n = v_n - u_n$.

1)- أ- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ب- بين أن $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، ثم عبر عن d_n بدلالة n .

2)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا و أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .

3)- لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع : $S_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$.

أ- عبر عن S_n بدلالة n لكل $n \in \mathbb{N}$.

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، عبر عن المجموع $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ بدلالة S_n ، ثم بدلالة u_n و u_0 .

ج- عبر عن u_n بدلالة n ، ثم إستنتج v_n بدلالة n لكل $n \in \mathbb{N}^*$.

■ **التمرين رقم 04:** $\left(05pts\right)$

⇦ ليكن $ABCD$ معينا مركزه O .

و نعتبر النقطتين E و F بحيث : $E=bar\left\{(A,2);(B,1)\right\}$ و $F=bar\left\{(C,2);(D,1)\right\}$.

1)- أثبت أن المستقيم (EF) يمر من النقطة O .

2)- المستقيم (EF) يقطع (AD) في النقطة I و يقطع (BC) في النقطة J .

▪ بين أن $BIDJ$ متوازي الأضلاع .

3)- بين أن المثلثين BDI و BDJ قائما الزاوية .

⇦ تمارين إضافية:

■ **التمرين رقم 01:**

⇦ نعتبر المتتاليتين $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي :

$$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1} \text{ و } T_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n} .$$

▪ بين أن $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا و $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا و أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);T_n<S_n$.

■ **التمرين رقم 02:**

⇦ ليكن ABC مثلثا مركزه ثقله G و النقطة O هي مركز الدائرة المحيطه به .

و لتكن H النقطة المعرفة بما يلي : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ والنقط A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$.

1)- أنشىء الشكل بدون وضع النقطة H .

2)- بين أن : $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$ ، ثم إستنتج أن : $(AH)\perp(BC)$.

3)- ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك (ثم أنشىء النقطة H) .

4)- بين أن : $O=bar\left\{(A,1);(B,1);(C,1);(H,-1)\right\}$ ، ثم إستنتج أن النقط O و G و H مستقيمية و حدد موضع H على (OG) (المستقيم المار من هاته النقط يسمى مستقيم أولير) .

■ **التمرين رقم 03:**

⇦ لتكن $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)} .$$

▪ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\frac{S_n}{2}=1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مكبورة .

إنتهى الموضوع .

▪ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .