ثا . ابن الهيثم الأستاذ : أ . الساكت	ملخص حول الأعداد العقدية	2 ع ح آ

تعاريف : عدد عقدي –المرافق –المعيار

في كل فقرات الدرس نعتبر المستوى منسوبا لمعلم متعامد ممنظم ($(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$

المجموعة $\mathbb{C}$:

تحتوي المجموعة $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i

يحقق : $i^2 = -1$ ولدينا $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على شكل

$z = a + ib$ حيث a و b عددان حقيقيان .

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ و } b = 0 \;\; ; \; (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد z

a يسمى الجزء الحقيقي ل z ويرمز له ب : $Re(z)$

b يسمى الجزء التخيلي ل z ويرمز له ب : $Im(z)$

نربط كل عدد عقدي : $z = x + iy$ بالنقطة : $A(x,y)$ وبالمتجهة : $\vec{u}(x,y)$

النقطة A تسمى صورة z والعدد z يسمى لحق A

المتجهة $\vec{u}$ تسمى صورة والعدد z يسمى لحق $\vec{u}$

ونكتب : $z = aff(A)$ و $z = aff(\vec{u})$ ونرمز ل z ب $z_{\vec{u}}$ أو z_A

المرافق :

مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ **هو العدد العقدي** $\bar{z} = a - ib$

ولدينا :

$\overline{zt} = \bar{z}\bar{t}$	$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
$\overline{\left(\frac{t}{z}\right)} = \frac{\bar{t}}{\bar{z}}$	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

المعيار:

معيار العدد العقدي $z = a + ib$ **هو العدد الحقيقي الموجب :**

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

إذا كانت M لحقها z فإن $|z| = OM$ ولدينا :

$\lvert z \times t\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert t\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\left\lvert\frac{z}{t}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert t\rvert}$

I منتصف $[AB]$ تعني $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$

لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $z_B - z_A$

المسافة AB هي $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات

z عدد حقيقي $\Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = 0$

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

تكون النقط A و B و C و D متداورة إذا كان $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

العمدة:

تعريف :

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا غير منعدم صورته M

كل قياس α للزاوية $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})$ بالراديان يسمى عمدة

للعدد العقدي z و نرمز له ب : $arg(z)$ ونكتب :

$arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$

الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

إذا كان $|z| = r$ و $ar(z) \equiv \alpha[2\pi]$ فإن :

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي ل z ونكتب: $z = [r,\alpha]$

$$z = z' \Leftrightarrow \left[arg(z) \equiv arg(z')[2\pi] \text{ و } |z| = |z'|\right]$$

خاصيات:

إذا كان : $z = [r,\alpha]$ و $z' = [r',\alpha']$ فإن :

$\bar{z} = [r,-\alpha]$	$-z = [r,\pi+\alpha]$	$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r},-\alpha\right]$
$z \times z' = [r \times r',\alpha+\alpha']$	$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$	

قياس زاوية : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

قياس زاوية : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

خاصيات المثلثات:

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r,\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1,\alpha]$	ABC متساوي الساقين في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1,\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1,\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC متساوي الأضلاع

التمثيل العقدي لتحويلات في المستوى

الشكل الأسي للعدد : $z = [r,\alpha]$ هو : $z = re^{i\alpha}$
التمثيل العقدي للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(b)$: $z' = z + b$
التمثيل العقدي للتحاكي $h(\Omega,k)$ حيث : $\Omega(\omega)$ $z' - \omega = k(z - \omega)$
التمثيل العقدي للتحاكي $R(\Omega,\alpha)$ حيث : $\Omega(\omega)$ $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

المعادلة : $az^2 + bz + c = 0$ **حيث : a و b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$**

$\Delta = b^2 - 4ac$	حل المعادلة:
$\Delta > 0$	$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta < 0$	$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$z = \frac{-b}{2a}$

موافر - أولير:

Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$