تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم تجريبية

يوليوز 2011

ذ. سعيد الصديق ثا.الشابي التأهيلية تارودانت

التمرين الأول

❶ أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 2x - 3 = 0$

لدينا $\Delta' = 1 + 3 = 4$

إذن : $x_2 = 1 - 2 = -1$ و $x_1 = 1 + 2 = 3$

وبالتالي $S = \{-1; 3\}$

ب- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

نضرب طرفي المعادلة في e^x

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

نضع $X = e^x$

إذن : $(E) \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$

إذن : $X = 3$ أو $X = -1$

بما أن $X > 0$ فإن $X = 3$

أي $e^x = 3$

إذن $x = ln3$

وبالتالي $S = \{ln3\}$

❷ لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^{x+1} \geq e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^{x+1}) \geq \ln(e^{-x})$$
$$\Leftrightarrow x + 1 \geq -x$$
$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

وبالتالي $S = \left[\frac{-1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

التمرين الثاني

❶ لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$

لدينا : $\Delta' = 9 - 18 = -9 = (3i)^2$

إذن $z_1 = 3 + 3i$ و $z_2 = 3 - 3i$

إذن $S = \{3 - 3i\,;3 + 3i\}$

❷ أ– لنكتب العددين a و b على الشكل المثلثي :

$$a = 3 + 3i = \sqrt{18}\left(\frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{3i}{\sqrt{18}}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{3i}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$$
$$= \left[3\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$$

لدينا $b = 3 - 3i = \bar{a} = \left[3\sqrt{2}\ ;-\frac{\pi}{4}\right]$

ب- لنبين أن b'=6

لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OA}$

لدينا : $\overrightarrow{OA}(3 + 3i)$ إذن الكتابة العقدية للإزاحة t هي : z'=z+3+3i

بما أن B' هي صورة B بالإزاحة t فإن :

$$b' = b+3+3i = 3-\cancel{3}i+3+\cancel{3}i = 6$$

ج- لنبين أن $\frac{b-b'}{a-b'} = i$

لدينا $\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i} = \frac{3i^2-3i}{3i-3} = \frac{(3i-3)i}{3i-3} = i$

طبيعة المثلث ABB' :

لدينا : $\frac{B'B}{B'A} = \frac{|b-b'|}{|a-b'|} = \left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = |i| = 1$

إذن : B'B=B'A

من جهة أخرى لدينا : $\left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \arg(i)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

و بالتالي فإن المثلث AB’B مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B’

د- OAB’B مربع

Aff($\overrightarrow{BB'}$)=b’- b

=3+3i

لدينا $\overrightarrow{OA}(3+3i)$ و $\overrightarrow{BB'}(3+3i)$

إذن $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BB'}$

إذن OAB’B متوازي الأضلاع

بما أن AB’B متساوي الساقين و قائم الزاوية في B’

فإن OAB’B مربع

التمرين الثالث

❶ أ- لدينا

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{3u_n-1}{3(1+15u_n)}$$

$$=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$$

ب- $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n>\frac{1}{3}$

من أجل n=0 لدينا $u_0=1>\frac{1}{3}$

نفترض أن : $u_n>\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_n-\frac{1}{3}>0\\15u_n+1>6>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}>0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > \frac{1}{3}$

❷ (V_n) متتالية هندسية

$$V_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{18u_n}{1+15u_n}} = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n}$$

$$= \frac{3u_n}{18u_n} - \frac{1}{18u_n} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{3u_n} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) = \frac{1}{6} V_n$$

وبالتالي فإن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

لدينا $V_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

إذن $V_n = V_0 \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

❸ لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

لدينا $V_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3u_n} = 1 - V_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3(1 - V_n)}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}$$

$$u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n)}$$

لدينا $-1 < \frac{1}{6} < 1$ إذن $\lim_{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

و بالتالي فإن : $\lim_{+\infty} u_n = \frac{1}{3}$

التمرين الرابع

I - ❶ أ- $g'(x) = \frac{x+1}{x}$

لدينا $g(x) = x - 1 + lnx$

$$\Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

ب- g تزايدية على I

لدينا $x \in]0 ; +\infty[$ إذن $g'(x) = \frac{x+1}{x} > 0$

إذن g تزايدية على I

❷ بما أن g تزايدية على $[1; +\infty[$ فإن $\forall x \in [1; +\infty[: g(x) \geq g(1) = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in [1; +\infty[: g(x) \geq 0$$

لدينا كذلك g تزايدية على $]0 ; 1]$ فإن $\forall x \in]0 ; 1] : g(x) \leq g(1) = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in]0 ; 1] : g(x) \leq 0$$

II - ❶ أ - $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{0^+} \frac{x-1}{x} = \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty$ و $\lim_{0^+} lnx = -\infty$

إذن $\lim_{0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) lnx = +\infty$

و بالتالي فإن $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$

(C) يقبل محور الأراتيب مقاربا عموديا.

ب- $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ و $\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$

إذن $\lim_{+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = +\infty$

أي $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

- لدينا $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

إذن $\lim_{+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} = 1 \times 0 = 0$

- و بالتالي فإن $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ج- (C) يقبل فرعا شلجميا في إتجاه محور الأفاصيل.

❷ أ – $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

لدينا $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' \ln x + \left(\frac{x-1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$

$$= \frac{\ln x}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$$

$$= \frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

ب – لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

إذن $\forall x \in [1;+\infty[: g(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \forall x \in [1;+\infty[: f'(x) \geq 0$$

أي f تزايدية على $[1;+\infty[$

من جهة أخرى لدينا : $\forall x \in]0 \ ; \ 1] : g(x) \leq 0$

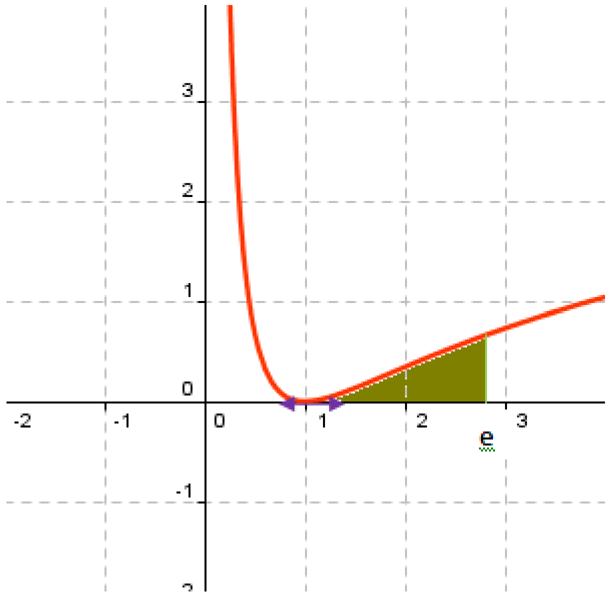
$$\Rightarrow \forall x \in]0 \ ; \ 1] : f'(x) \leq 0$$

أي f تناقصية على $]0\ ;\ 1]$

ج – جدول تغيرات الدالة f على I

x	0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❸ إنشاء (C) في م.م.م.



❹ أ– H دالة أصلية للدالة h على I

الدالتان H و h معرفتان على المجال I.

من جهة أخرى لدينا: $H'(x) = \left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]' = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times lnx$

$$= \frac{lnx}{x} = h(x)$$

ب– $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

لدينا $\int_1^e \frac{lnx}{x} dx = \int_1^e h(x)\, dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = \frac{1}{2}$

ج– $\int_1^e lnx\,dx = 1$

Said.seddik@hotmail.fr

نضع : $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=1$

و نستعمل مكاملة بالأجزاء :

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e v'(x)u(x)dx = [v(x)u(x)]_1^e - \int_1^e v(x)u'(x)dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e - (e-1)$$

$$= 1$$

❺ أ- $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ لكل x من I .

ليكن x من I

لدينا : $\ln x - \frac{\ln x}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = f(x)$

ب- مساحة الحيز $\mathcal{S}$ المحصور بين المنحنى(C) و محور الأفاصيل و المستقيمان x=1 و x=e :

لدينا $\mathcal{S} = \int_1^e |f(x)|dx \quad cm^2$

لنحسب $\int_1^e |f(x)|dx$

لدينا : $\int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e \left|\ln x - \frac{\ln x}{x}\right| dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$$= \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

$\ln x \geq \frac{\ln x}{x}$

لأن $x \geq 1$

و بالتالي $\mathcal{S}=0.5cm^2$

لاتنسونا من صالح دعائكم