إنجـاز : ذ. محمد حمدان
ثانوية أبي حيان التوحيدي
نيابـة النواصـــر
contact: M^ed Hamdane

التمريـــن الأول ($3,5$ نقط)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة.

❶ نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right);\ x*y=x+y-2$

ا) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي.

✓ ليكن x و y من $\mathbb{Z}$ لدينا: $x*y=x+y-2=y+x-2=y*x$ (الجمع تبادلي في $\mathbb{Z}$)

إذن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$.

✓ ليكن x و y و z من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)+z-2\\ &= (x+y-2)+z-2\\ &= x+(y+z-2)-2\\ &= x+(y*z)-2\\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

إذن القانون $*$ تجميعي في المجموعة $\mathbb{Z}$.

ب) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$ إذن e هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z};*)$ يكافئ $(\forall a\in\mathbb{Z}): a*e=a$

$$\begin{aligned}(\forall a\in\mathbb{Z}): a*e=a &\iff a+e-2=a\\ &\iff e=2\end{aligned}$$

إذن $e=2$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

ج) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

✓ $*$ قانون تركيب داخلي تبادلي و تجميعي في $\mathbb{Z}$.

✓ القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$ هو 2.

✓ نبين أن كل عنصر من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$.

القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$ إذن x' هو مماثل x في $(\mathbb{Z};*)$ يكافئ $x*x'=2$

$$\begin{aligned}x*x'=2 &\iff x+x'-2=2\\ &\iff x'=4-x\end{aligned}$$

و بما أن $4-x\in\mathbb{Z}$ فإن كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$ هو $x'=4-x$.

خلاصة: $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

❷ نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right);\ x\top y=xy-2x-2y+6$

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي:
$$\begin{aligned}f\ :\ \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ x &\longmapsto f(x)=x+2\end{aligned}$$

ا) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$.

◄ f تطبيق من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$.

ليكن x و y من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)\top f(y) &= f(x)\times f(y)-2f(x)-2f(y)+6 \\ &= (x+2)\times(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6 \\ &= x\times y+2x+2y+4-2x-4-2y-4+6 \\ &= x\times y+2 \\ &= f(x\times y) \end{aligned}$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$.

◄ ليكن z عنصرا من $\mathbb{Z}$ لدينا : $f(x)=z \iff x+2=z \iff x=z-2$

و $x=z-2\in\mathbb{Z}$ إذن المعادلة $f(x)=z$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}$

و منه f تطبيق تقابلي من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$. خلاصة: التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$.

ب) بين أن $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);\ (x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$.

ليكن x و y و z من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned} (x*y)\top z &= (x+y-2)\top z \\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6 \\ &= xz+yz-2z-2x-2y+4-2z+6 \\ &= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2 \\ &= (x\top z)+(y\top z)-2 \\ &= (x\top z)*(y\top z) \end{aligned}$$

خلاصة: $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);\ (x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$.

❸ استنتج من كل ما سبق أن $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية.

✓ $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية (حسب ❶ ج))

✓ بما أن الضرب تجميعي و تبادلي و يقبل العدد 1 عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$ فإن القانون $\top$ تجميعي و تبادلي و يقبل العدد $f(1)=3$ عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$ لأن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};\times)$ نحو $(\mathbb{Z};\top)$ (حسب السؤال ❷ أ))

✓ لدينا $*$ و $\top$ تبادليين في $\mathbb{Z}$ و $(x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$; $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$ (حسب ❷ ب))

إذن القانون $\top$ توزيعي على القانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

خلاصة: $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية.

❹ ا) بين أن $x\top y=2$ إذا و فقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$.

ليكن x و y من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned} x\top y=2 &\iff xy-2x-2y+6=2 \\ &\iff x(y-2)-2(y-2)=0 \\ &\iff (y-2)(x-2)=0 \\ &\iff x-2=0 \text{ أو } y-2=0 \quad (\text{لأن } (\mathbb{Z},+,\times) \text{ حلقة كاملة}) \\ &\iff x=2 \text{ أو } y=2 \end{aligned}$$

خلاصة: $x\top y=2$ إذا و فقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$.

ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة.

صفر الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ هو 2 و لدينا $x\top y=2 \iff x=2$ أو $y=2$ (حسب ❹ أ)) و منه الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ لا تحتوي على قواسم للصفر.

خلاصة: $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة كاملة.

ج) هل $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسم ؟ (علل جوابك).

$(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها 3. ليكن a عنصرا من $\mathbb{Z}\backslash\{2\}$.

a يقبل مماثلا a' في $\mathbb{Z}$ بالنسبة للقانون $\top$ يكافئ $a\top a'=3$ لدينا:

$$\begin{aligned} a\top a'=3 &\iff aa'-2a-2a'+6=3\\ &\iff a'(a-2)=2a-3\\ &\iff a'=\frac{2a-3}{a-2}\end{aligned}$$

من أجل $a=5\in\mathbb{Z}$ لدينا $a'=\frac{7}{3}\notin\mathbb{Z}$ إذن 5 ليس له مقلوبا بالنسبة للقانون $\top$ في $\mathbb{Z}$.

خلاصة: $(\mathbb{Z},*,\top)$ ليس جسم

التمريـــن الثاني (3,5 نقط)

I) ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(E): 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$.

❶ تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$.

حساب Δ مميز المعادلة (E):

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-\left(3+i\sqrt{3}\right)a\right]^2-4\times 2\times\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left[\left(-1+i\sqrt{3}+4\right)^2\right]a^2-8\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left[\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+8\left(-1+i\sqrt{3}\right)+16\right]a^2-8\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+8\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2-8\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2\end{aligned}$$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

بما أن $\Delta\neq 0$ لأن $a\in\mathbb{C}^*$ فإن المعادلة (E) لها حلين مختلفين هما:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}\\ &=\frac{3a+i\sqrt{3}a+a-i\sqrt{3}a}{4}\\ &=\frac{4a}{4}\\ &=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}\\ &=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}a\\ &=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\\ &=ae^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\left\{a;ae^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$

II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$
نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي a و $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z .
ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$.
نضع $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$ (حيث r^1 هو الدوران العكسي للدوران r)
ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

❶ تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع.

لدينا $\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}=\dfrac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ إذن $\left|\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
و منه فإن $OA=OB$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

و بالتالي المثلث OAB متساوي الأضلاع.

ملاحظة: لدينا $Z_B-Z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_A-Z_O\right)$ إذن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و بالتالي المثلث OAB متساوي الأضلاع.

❷ ا) بين أن: $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

◄ المتساوية الأولى:

$$\begin{aligned}
A_1=r^{-1}(A) &\iff a_1-z=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(a-z\right)\\
&\iff a_1=e^{-i\frac{\pi}{3}}a-e^{-i\frac{\pi}{3}}z+z\\
&\iff a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\\
&\iff a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z
\end{aligned}$$

◄ المتساوية الثانية:

$$\begin{aligned}
B_1=r(B) &\iff b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b-z\right)\\
&\iff b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}b-e^{i\frac{\pi}{3}}z+z\\
&\iff b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}a+\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z\\
&\iff b_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}a+\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\\
&\iff b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z
\end{aligned}$$

ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع

OA_1MB_1 متوازي الأضلاع يكافئ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$ لدينا

$$\begin{aligned}
Z_{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}} &= Z_{\overrightarrow{OA_1}}+Z_{\overrightarrow{OB_1}}\\
&= a_1+b_1\\
&= \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\\
&= z\\
&= Z_{\overrightarrow{OM}}
\end{aligned}$$

و منه $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$ و بالتالي الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع.

❸ نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$.

ا) بين أن: $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\dfrac{z-b}{z-a} \times \dfrac{a}{b}$

لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{z-b_1}{z-a_1} &= \frac{b_1-z}{a_1-z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)}{e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)} = \frac{z-b}{z-a} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
&= -\frac{z-b}{z-a} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = -e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b} \qquad \left(b = e^{i\frac{\pi}{3}}a \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)
\end{aligned}$$

ب) بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة.

حسب السؤال II) ❶ النقط O و A و B غير مستقيمية لأن OAB مثلث متساوي الأضلاع إذن.

$$\begin{aligned}
\text{نقط مستقيمية } B_1 \text{ و } A_1 \text{ و } M &\Longleftrightarrow \frac{b_1-z}{a_1-z} \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \times \frac{0-a}{0-b} \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \div \frac{0-b}{0-a} \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow M \text{ و } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ نقط متداورة}
\end{aligned}$$

خلاصة: النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة.

التمرين الثالث (3 نقط)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحية الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية:

$$(\Re):\ 3^n - 2^n \equiv [n]$$

❶ نفترض أن n يحقق الخاصية $(\Re)$ و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n.

ا) بين أن: $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ ثم استنتج أن $p \geqslant 5$.

◄ لدينا p يقسم n و n يقسم $3^n - 2^n$ حسب الافتراض، إذن p يقسم $3^n - 2^n$ و بالتالي $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ $(\bigstar)$.

◄ نفترض أن $p < 5$ إذن $p = 2$ أو $p = 3$ (لأن p عدد أولي)

✓ إذا كان $p = 2$ فإن $3^n - 2^n \equiv 1[2]$ و منه $0 \equiv 1[2]$ و هذا غير يمكن.

✓ إذا كان $p = 3$ فإن $3^n - 2^n \equiv (-1)^{n+1}[2]$ و منه $0 \equiv \pm 1[3]$ و هذا غير يمكن.

في كلتا الحالتين العلاقة $(\bigstar)$ غير محققة إذن $p \neq 2$ و $p \neq 3$ و بالتالي $p \geqslant 5$.

ب) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و أن $3^{p-1} \equiv 1[p]$

✓ لدينا 2 و p عددان أوليان و $p \neq 2$ و منه $2 \wedge p = 1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما لدينا : $2^{p-1} \equiv 1[p]$

✓ لدينا 3 و p عددان أوليان و $p \neq 3$ و منه $3 \wedge p = 1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما لدينا : $3^{p-1} \equiv 1[p]$

ج) بين أنه يوجد زوج (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $an - b(p-1) = 1$.

◄ نبين أن $n \wedge (p-1) = 1$. نضع $\delta = n \wedge (p-1)$ و نفترض أن $\delta \neq 1$ (أي أن $\delta > 1$)

✓ إذا كان δ أولي فإن δ قاسم أولي للعدد n ، و $\delta \leqslant p-1 < p$ و هذا غير ممكن لأن p أصغر قاسم أولي موجب لـ n.

✓ إذا كان δ غير أولي فإن أصغر قاسم فعلي d للعدد δ هو عدد أولي و لدينا $d|\delta$ و $\delta|n$ إذن d قاسم أولي للعدد n

و $d < p$ و هذا غير ممكن لأن p أصغر قاسم أولي موجب لـ n. و بالتالي $\delta = 1$ خـلاصــة: $n \wedge (p-1) = 1$

◄ لدينا $n \wedge (p-1) = 1$ إذن حسب مبرهنة بوزو يوجد u و v من $\mathbb{Z}$ بحيث: $nu + (1-p)v = 1$

نضع $a = u$ و $b = -v$. خلاصة: يوجد a و b من $\mathbb{Z}$ بحيث: $an - b(1-p) = 1$.

د) ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $p-1$

. ($a = q(p-1) + r$ حيث $0 \leqslant r < p-1$ و $q \in \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $rn = 1 + k(p-1)$

◄ لدينا $a = q(p-1) + r \implies a \equiv r[p-1] \implies an \equiv rn[p-1]$

و لدينا كذلك $an - b(p-1) = 1 \implies an = b(p-1) + 1 \implies an \equiv 1[p-1]$

نستنتج إذن أن $rn \equiv 1[p-1]$ و بالتالي يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث $rn = 1 + k(p-1)$.

◄ نبين أن k عدد صحيح طبيعي :

✓ إذا كان $r = 0$ فإن $p-1$ يقسم a و منه $a \wedge (p-1) = p-1 = 1$ أي أن $p = 2$ تناقض لأن $p \geqslant 5$.

إذن $r \geqslant 1$ و لدينا $r \geqslant 1 \implies rn \geqslant 1 \iff rn - 1 \geqslant 0 \iff k(p-1) \geqslant 0 \iff k \geqslant 0$

و بالتالي يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $rn = 1 + k(p-1)$

❷ استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيحي طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية: $(\Re)$

نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي $n \geqslant 2$ و يحقق الخاصية $(\Re)$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n

و منه يوجد a و b من $\mathbb{Z}$ بحيث: $an - b(1-p) = 1$ (حسب السؤال ❶ ج)).

ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد a على $p-1$ إذن

حسب السؤال ❶ ب) لدينا $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و أن $3^{p-1} \equiv 1[p]$

و حسب السؤال ❶ د) لدينا $rn = 1 + k(p-1)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

إذن $\boxed{1}$ $\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1[p] \\ 3^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases} \implies \begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1[p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1[p] \end{cases} \implies \begin{cases} 2^{rn-1} \equiv 1[p] \\ 3^{rn-1} \equiv 1[p] \end{cases} \implies \begin{cases} 2^{rn} \equiv 2[p] \\ 3^{rn} \equiv 3[p] \end{cases}$

حسب السؤال ❶ أ) لدينا $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ يعني أن $3^n \equiv 2^n[p]$ و منه $\boxed{2}$ $3^{rn} \equiv 2^{rn}[p]$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نستنتج أن $3 \equiv 2[p]$ أي أن p يقسم 1 و هذا تناقض إذن الافتراض خاطئ

خلاصــة: لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\Re)$

مسألـــــة (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln(x)} \; ; \; x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$

الجزء الأول:

❶ ا) بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} \dfrac{x-1}{x\ln(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x-1}{\ln(x)} = 1 \times 1 = 1 = h(1)$ (لأن $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$)

وبالتالي h متصلة على اليمين في 1 .

ب) بين أن $(\forall x > 1)\,; \ln(x) < x-1$ ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1; +\infty[$.

◄ نعتبر الدالة u المعرفة على $[1; +\infty[$ بما يلي : $u(x) = \ln(x) - (x-1)$ ، الدالة u قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ (مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$) و لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ لكل x من $[1; +\infty[$

ليكن x من المجال $]1; +\infty[$ لدينا: $x > 1 \implies \dfrac{1}{x} < 1 \implies u'(x) < 0$ إذن u تناقصية قطعا على $[1; +\infty[$

و منه $x > 1 \implies u(x) < u(1)$ أي أن $\ln(x) - (x-1) < 0$. و بالتالي $(\forall x > 1)\,; \ln(x) < x-1$

◄ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على هذا المجال

إذن لكل x من $]1;+\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-1)'\times(x\ln(x))-(x-1)\times(x\ln(x))'}{(x\ln(x))^2} \\ &= \frac{x\ln(x)-(x-1)\times(\ln(x)+1)}{(x\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x)-x+1}{(x\ln(x))^2} \end{aligned}$$

لدينا $h'(x)=\dfrac{\ln(x)-x+1}{(x\ln(x))^2}$ لكل x من $]1;+\infty[$ إذن إشارة $h'(x)$ هي إشارة $\ln(x)-x+1$ و بما أن $\ln(x)-x+1<0$ (حسب نتيجة السؤال السابق) فإن الدالة h تناقصية قطعا على $]1;+\infty[$

❷ ا) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .

◄

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\ln(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x\ln(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

◄ جدول تغيرات الدالة h:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	1 $\searrow$ 0

ب) استنتج أن $(\forall x\geqslant 1)\,;\ 0<h(x)\leqslant 1$.

بما أن h متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ فإن $h([1;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x);h(1)\right]=]0;1]$

و منه $(\forall x\geqslant 1):\ h(x)\in]0;1]$ و بالتالي: $(\forall x\geqslant 1)\,;0<h(x)\leqslant 1$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي: $\mathrm{g}(1)=\ln 2$ و $(\forall x>1)\,;\ \mathrm{g}(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ ا) تحقق أن: $(\forall x>1)\,;\ \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\ln 2$.

ليكن x من $]1;+\infty[$ لدينا:

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{x^2}\frac{(\ln t)'}{\ln t}\,\mathrm{d}t=[\ln|\ln t|]_x^{x^2}=\ln\left|\frac{\ln x^2}{\ln x}\right|=\ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right|=\ln 2$$

ب) تحقق أن: $(\forall x>1)\,;\ \mathrm{g}(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$.

ليكن x من $]1;+\infty[$ لدينا:

$$\mathrm{g}(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

ج) بين أن : $(\forall x>1)\,;\ \mathrm{g}(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$.

ليكن x من $]1;+\infty[$ إذن حسب السؤال السابق لدينا: $\mathrm{g}(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

نستعمل المكاملة بتغيير المتغير ، نضع $z=\sqrt{t}$ إذن $\begin{cases} t=x\Longrightarrow z=\sqrt{x} \\ t=x^2\Longrightarrow z=x \\ z=\sqrt{t}\Longrightarrow \mathrm{d}t=2z\,\mathrm{d}z \end{cases}$.

و منه $$\mathrm{g}(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{z-1}{z^2\ln z^2}2z\,\mathrm{d}z=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{z-1}{z\ln z}\,\mathrm{d}z=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

❷ أ) بين أن: $(\forall x>1)\,;\ \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2\leqslant \left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$.

ليكن x من $]1;+\infty[$ ، حسب السؤال السابق لدينا: $\mathrm{g}(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t$

و بما أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$ و بالخصوص على $\left[\sqrt{x};x\right]$ فإن

$$\begin{aligned}
(\forall x>1)\ \sqrt{x}\leqslant t\leqslant x \quad &\Longrightarrow\quad h(x)\leqslant h(t)\leqslant h(\sqrt{x})\\
&\overset{(\sqrt{x}<x)}{\Longrightarrow}\quad \int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)\,\mathrm{d}t\leqslant \int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \int_{\sqrt{x}}^{x}h(\sqrt{x})\,\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow\quad h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\mathrm{d}t\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2\leqslant h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x}\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow\quad \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2\leqslant \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

ب) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 .

ليكن x من $]1;+\infty[$ ، حسب السؤال السابق لدينا: $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2\leqslant \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})$

و بما أن $(x-1>0)$ فإن $(\forall x>1):\ \left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)\leqslant \dfrac{\mathrm{g}(x)-\ln 2}{x-1}\leqslant \left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$

لدينا: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x)=\frac{1}{2}\times h(1)=\frac{1}{2}$ (h متصلة على اليمين في 1)

و $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\times h(1)=\frac{1}{2}$ (h متصلة على اليمين في 1)

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و الترتيب فإن $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{\mathrm{g}(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$

خلاصــة: g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $\mathrm{g}'_d(1)=\dfrac{1}{2}$.

ج) بين أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x)=+\infty$ و أن: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{g}(x)}{x}=0$.

◄ حسب ❷ أ) لدينا : $(\forall x>1):\ \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2$

إذن $(\forall x>1):\ \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\dfrac{x}{\ln x}\times\dfrac{x-1}{x}+\ln 2\leqslant \mathrm{g}(x)$

و لدينا $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\frac{x}{\ln x}\times\frac{x-1}{x}+\ln 2=1\times(+\infty)\times 1+\ln 2=+\infty$ $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^{+}\right)$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و الترتيب فإن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x)=+\infty$.

◄ حسب ❷ أ) لدينا : $(\forall x>1):\ \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leqslant \mathrm{g}(x)-\ln 2\leqslant \left(x-\sqrt{x}\right)h(\sqrt{x})$

إذن $(\forall x>1):\ \dfrac{\ln 2}{x}+\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)\leqslant \dfrac{\mathrm{g}(x)}{x}\leqslant \dfrac{\ln 2}{x}+\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})$ (لأن $x>1>0$)

و لدينا $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)=\lim_{+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x)=0+1\times 0=0$ $\left(\displaystyle\lim_{+\infty}h(x)=0\right)$

و $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})=\lim_{+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x})=0+1\times 0=0$ $\left(\displaystyle\lim_{+\infty}h(\sqrt{x})=0\right)$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و الترتيب فإن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{g}(x)}{x}=0$.

❸ أ) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و أن: $(\forall x>1)\,;\ \mathrm{g}'(x)=\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$.

الدالـة $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ متصلة على المجال $]1;+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية H على هذا المجال

و لدينا: $(\forall x>1)\,;\ \mathrm{g}(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t=H(x^2)-H(x)$. و $(\forall z>1)\,;\ H'(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z}\ln z}$

الدوال H و $x \overset{u}{\longmapsto} x^2$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $]1;+\infty[$ و $u(]1;+\infty[) \subset]1;+\infty[$ إذن $x \mapsto H(x^2)$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق)

و منه فإن g قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(H(x^2)-H(x)\right)' = 2xH'(x^2)-H'(x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2}\ln x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

خلاصـــة : g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $(\forall x>1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$.

ب) استنتج أن $(\forall x \geqslant 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

◄ لكل x من $[1;+\infty[$ لدينا: $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$ إذن

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x &\overset{h\searrow}{\Longrightarrow} h(x) \leqslant h(\sqrt{x}) \leqslant h(1) \\ &\overset{h(x)\geqslant 0}{\Longrightarrow} 0 < h(\sqrt{x}) \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow 0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◄ جدول تغيرات الدالة g:

لدينا $(\forall x \geqslant 1)\,;0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$

إذن g تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$

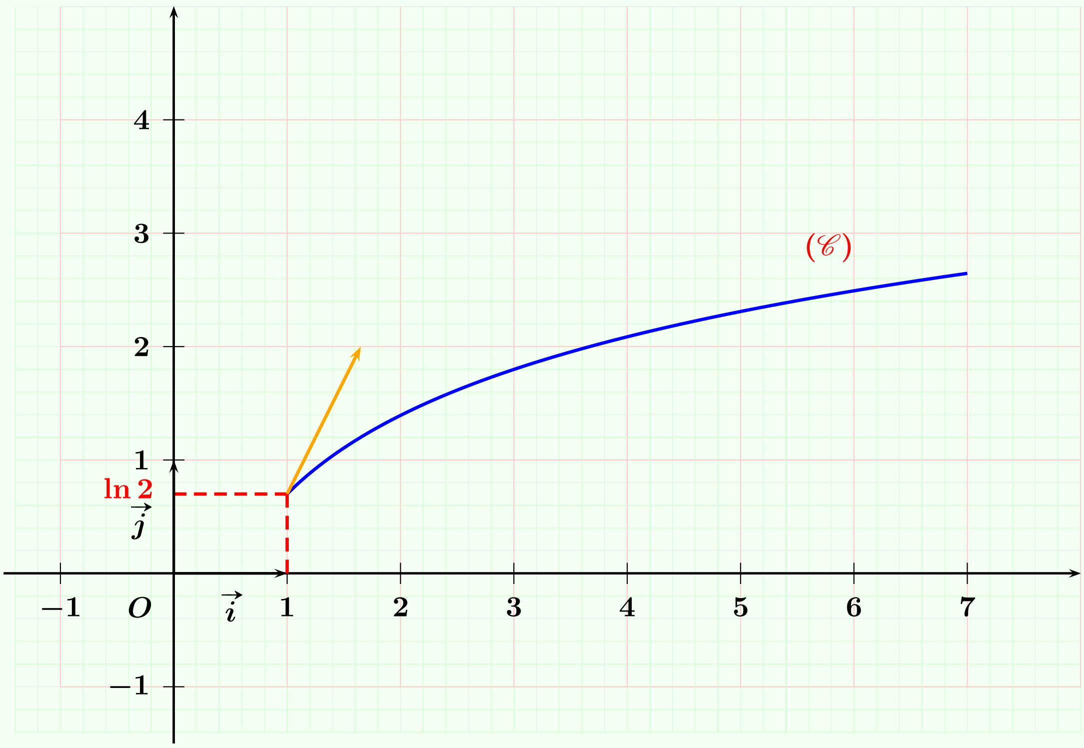
x	1 $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2 \nearrow +\infty$

ج) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$ إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

g قابلة للاشتقاق على يمين 1 إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس معادلته $y = \frac{1}{2}(x-1)+\ln 2$.

$g(1) = \ln 2$ و g تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$.



الجزء الثالث:

(I

❶ بين أن الدالة $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2]$.

✓ الدالة g متصلة على $[1;+\infty[$ لأنها قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$ (الجزء الثاني ❷ ب) و ❸ أ))

و الدالة $x \longmapsto -x+1$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$ (لأنها دالة حدودية)

إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$ (مجموع دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق).

✓ لكل x من $[1;+\infty[$ لدينا $k'(x) = g'(x) - 1$ و حسب السؤال ❸ ب) من الجزء الثاني لدينا

$(\forall x \geqslant 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ و منه $(\forall x \geqslant 1)\ ;\ k'(x) < 0$ أي أن الدالة k تناقصية قطعا على $[1;+\infty[$

◄ نستنتج أن الدالة k تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$ $= \left]\lim\limits_{x\to+\infty} k(x); k(1)\right]$ $k([1;+\infty[) =$

لأن $k(1) = \ln 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{g(x)}{x} - 1\right) + 1 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

خلاصـــة: الدالة k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2]$.

❷ استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث: $1 + g(\alpha) = \alpha$.

بما أن k تقابل من المجال $]1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2[$ و $0 \in]-\infty;\ln 2[$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]1;+\infty[$ بحيث $k(\alpha) = 0$ و لدينا : $1 + g(\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow g(\alpha) - \alpha + 1 = 0 \Longleftrightarrow k(\alpha) = 0$.

خلاصـــة: يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث: $1 + g(\alpha) = \alpha$.

(II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ المعرفة بما يلي: $1 \leqslant u_o < \alpha$ و $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$ $(\forall n \geqslant 0)$.

❶ ا) بين أن : $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ 1 \leqslant u_n < \alpha$.

✓ من أجل $n = 0$ لدينا $1 \leqslant u_o < \alpha$ المتفاوتة محققة.

✓ ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $1 \leqslant u_n < \alpha$ و نبين أن $1 \leqslant u_{n+1} < \alpha$

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، لدينا $1 \leqslant u_n < \alpha$ و بما أن g تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ و بالخصوص على $[1;\alpha[$ فإن

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n < \alpha &\Longrightarrow g(1) \leqslant g(u_n) < g(\alpha) \\ &\Longrightarrow 1 + g(1) \leqslant 1 + g(u_n) < 1 + g(\alpha) \\ &\Longrightarrow 1 + \ln 2 \leqslant u_{n+1} < \alpha \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant u_{n+1} < \alpha \qquad (1 + \ln 2 > 1) \end{aligned}$$

✓ و بالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع فإن $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ 1 \leqslant u_n < \alpha$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ تزايدية قطعا.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = 1 + g(u_n) - u_n = k(u_n)$ و بما أن الدالة k تناقصية قطعا على $[1;+\infty[$ و بالخصوص على $[1;\alpha[$ و $1 \leqslant u_n < \alpha$ فإن $k(u_n) > k(\alpha) = 0$ أي أن $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ تزايدية قطعا.

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ متقاربة و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ تزايدية قطعا و مكبورة بالعدد α فإنها متقاربة نهايتها ℓ حيث $\ell \in [1;\alpha]$

لأن $1 \leqslant u_n < \alpha \Longrightarrow 1 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \alpha \Longrightarrow 1 \leqslant \ell \leqslant \alpha$.

لدينا $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$ و g متصلة على $[1;+\infty[$ و بالخصوص على $[1;\alpha]$ إذن g متصلة في ℓ لدينا

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}=1+g(u_n) &\Longrightarrow \ell=1+g(\ell)\\
&\Longrightarrow k(\ell)=0\\
&\Longrightarrow k(\ell)=k(\alpha) \qquad (k(\alpha)=0)\\
&\Longrightarrow \ell=\alpha \qquad (k \text{ injective})
\end{aligned}
$$

خلاصـــة: المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ متقاربة و : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

❷ ا) بين أن: $(\forall n\geqslant 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، الدالة g متصلة على $[1;+\infty[$ و بالخصوص على $[u_n;\alpha]$ و قابلة للاشتقاق على $]u_n;\alpha[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا: $\dfrac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}=g'(c)\ \ /\ \ (\exists c\in\ ]u_n;\alpha[)$

لدينا $(\forall x\geqslant 1)\ ;\ 0<g'(x)\leqslant \dfrac{1}{2}$ و $c\in\ ]u_n;\alpha[\ \subset[1;+\infty[$ و منه $|g'(c)|\leqslant\dfrac{1}{2}$ إذن

$$
\begin{aligned}
\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}=g'(c) &\Longrightarrow \left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|g'(c)|\\
&\Longrightarrow \left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{2}\\
&\Longrightarrow \left|\frac{(u_{n+1}-1)-(\alpha-1)}{u_n-\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{2}\\
&\Longrightarrow |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}|u_n-\alpha|
\end{aligned}
$$

و بالتالي $(\forall n\geqslant 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ب) بين أن: $(\forall n\geqslant 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha|$.

✓ من أجل $n=0$ لدينا $|u_o-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^o|u_o-\alpha|$ المتفاوتة محققة.

✓ ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha|$ و نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}|u_o-\alpha|$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$
\begin{aligned}
|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha| &\Longrightarrow \frac{1}{2}\times|u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha|\\
&\Longrightarrow \frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_o-\alpha|\\
&\Longrightarrow |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_o-\alpha|
\end{aligned}
$$

لأن $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

✓ و بالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع فإن $(\forall n\geqslant 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha|$.

ج) استنتج مرة ثانية أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

لدينا : $(\forall n\geqslant 0)\ ;\ 0\leqslant|u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_o-\alpha|$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ لأن $\left(-1<\dfrac{1}{2}<1\right)$

إذن حسب مصاديق تقارب فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

خلاصـــة: المتتالية $(u_n)_{n\geqslant 0}$ متقاربة نهايتها α.