التمرين 1 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{5\mathcal{U}_n - 1}{\mathcal{U}_n + 3} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n > 1$.
3. نعتبر المتتالية $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{V}_n = \frac{1}{\mathcal{U}_n - 1}$$

أ. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها .

ب. استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

التمرين 2 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = 1 \quad , \quad \mathcal{U}_2 = 4 \\ \mathcal{U}_{n+1} = 2\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1} + 2 \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ونعتبر $(\mathcal{V}_n)_{n\geq1}$ المتتالية العرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$$

1. أحسب $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ و $\mathcal{V}_3$.
2. حدد طبيعة المتتالية العددية $(\mathcal{V}_n)_{n\geq1}$.
3. أحسب $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

التمرين 3 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{2\mathcal{U}_n + 3}{\mathcal{U}_n + 4} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{U}_3$.
2. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad 0 < \mathcal{U}_n < 1$ وأدرس رتابة $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. نعتبر المتتالية $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{U}_n - 1}{\mathcal{U}_n + 3}$$

أ. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية .

ب. أحسب $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

التمرين 4 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 5 \quad , \quad \mathcal{U}_1 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+2} = 6\mathcal{U}_{n+1} - 5\mathcal{U}_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ونعتبر $(\mathcal{V}_n)_{n\geq0}$ المتتالية العرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$$

1. أحسب $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{V}_0$.
2. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
3. أحسب ؛ بدلالة n ؛ المجموع :

$$S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \ldots + \mathcal{V}_{n-1}$$

4. استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

التمرين 5:

نعتبر $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = 3\mathcal{U}_n + 8 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

و $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 4$.

1. حدد طبيعة المتتالية العددية $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. حدد $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .
3. حدد؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \ldots + \mathcal{U}_n$.

التمرين 6 :

نعتبر $(\mathcal{U}_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = \dfrac{1}{3} \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{n + 3 + 2n\mathcal{U}_n}{3n + 3} \quad , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

والمتتالية $(\mathcal{V}_n)_{n\geq1}$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad \mathcal{V}_n = n(1 - \mathcal{U}_n)$.

1. أحسب u_2 و v_1 .
2. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$.
3. أحسب $\mathcal{V}_n$ ثم $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .
4. أحسب، بدلالة n ،المجموع التالي :

$$S_n = \mathcal{U}_1 + 2\mathcal{U}_2 + \ldots + n\mathcal{U}_n$$

التمرين 7 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n}{1 + 2\mathcal{U}_n} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. نعتبر $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{V}_n = \dfrac{1}{\mathcal{U}_n}$.

أ. بين أن المتتالية $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .

ب. استنتج $\mathcal{V}_n$ ثم $\mathcal{U}_n$ بدلالة n ..

2. نعتبر المتتالية $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي :

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{W}_n = 2^{\mathcal{V}_n}$.

أ. بين أن المتتالية $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية وحدد أساسها

q وحدها الأول $\mathcal{W}_0$.

ب. أحسب ، بدلالة n ، المجموع :

$S_n = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_n$.

التمرين 8 :

نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{\mathcal{U}_n}\right)^3 \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0\le \mathcal{U}_n < 1$.
3. أثبت أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .
4. نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{V}_n = \sqrt[3]{\mathcal{U}_n} - 1$$

أ. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

ب. حدد $\mathcal{V}_n$ ؛ ثم $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

جـ. حدد، بدلالة n ، المجموع التالي :

$S_n = \sqrt[3]{\mathcal{U}_0} + \sqrt[3]{\mathcal{U}_1} + \dots + \sqrt[3]{\mathcal{U}_n}$.

التمرين 9 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \quad , \quad \mathcal{U}_1 = 2 \\ \mathcal{U}_n = \dfrac{3\mathcal{U}_{n-1}\times\mathcal{U}_{n-2}}{\mathcal{U}_{n-2}+2\mathcal{U}_{n-1}} \quad , \quad n\ge 2 \end{cases}$$

نضع : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad \mathcal{V}_n = \dfrac{1}{\mathcal{U}_n} - \dfrac{1}{\mathcal{U}_{n-1}}$.

1. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية محددا أساسها q وحدها الأول $\mathcal{V}_1$.
2. أحسب $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

التمرين 10 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(\mathcal{U}_n)$ و $(\mathcal{V}_n)$ بحيث :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+2} = 5\mathcal{U}_{n+1} - 6\mathcal{U}_n \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

و $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 3^n$

1. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_{n+1} = 2\mathcal{U}_n + 3^n$.
2. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية وحدد أساسها و حدها الأول .
3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_n$

التمرين 11 :

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة مثنى مثنى وتحقق ما يلي :

i. a و b و c تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية حسابية .

ii. b و c و a تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية هندسية .

iii. $a+b+c=18$.

أحسب مجموع الحدود الستة الأولى لكل من المتتاليتين .

التمرين 12 :

نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \quad ; \quad \mathcal{U}_1 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+2} = \dfrac{2}{5}\mathcal{U}_{n+1} - \dfrac{1}{25}\mathcal{U}_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

نضع : $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_{n+1} - \dfrac{1}{5}\mathcal{U}_n$ و $\mathcal{W}_n = 5^n\mathcal{U}_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

1. بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$،ثم حدد $\mathcal{V}_n$ بدلالة n .
2. أ- بين أن $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها 5 .

ب- أكتب $\mathcal{W}_n$ بدلالة n ، ثم استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

3. أ- بين أن : $0 < \mathcal{U}_{n+1} \le \dfrac{2}{5}\mathcal{U}_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

ب- استنتج أن : $0 < \mathcal{U}_n \le \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$.

التمرين 13 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين كالآتي :

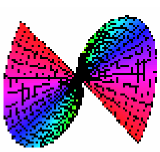
$$\forall n\in\mathbb{N}: \begin{cases} \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{5\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n}{2} \\ \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{4\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n}{3} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \mathcal{U}_0 = 3 \\ \mathcal{V}_0 = 0 \end{cases} .$$

نضع : $\mathcal{Y}_n = 5\mathcal{V}_n - 2\mathcal{U}_n \quad ; \quad \mathcal{X}_n = 3\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n \quad : \forall n\in\mathbb{N}$.

1. بين أن $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\mathcal{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين هندسيتين يتم حديد أساسيهما .
2. حدد ، بدلالة n ، كلا من $\mathcal{X}_n$ و $\mathcal{Y}_n$.
3. حدد ، بدلالة n ، كلا من $\mathcal{U}_n$ و $\mathcal{V}_n$.
4. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{V}_n$.
5. نضع : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

أ. حدد S_n بدلالة n .

ب. أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.


التمرين 1 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{U}_n^2 + 1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب الحدين $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.
2. لتكن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n^2 - 2$$

أ- بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

ب- استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

3. أ- بين أن : $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

ب- استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \sqrt{2} \le \mathcal{U}_n \le \sqrt{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

جـ- استنتج : $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

4. حدد ، بدلالة n ، $S_n = \mathcal{U}_0^2 + \mathcal{U}_1^2 + \mathcal{U}_2^2 + ... + \mathcal{U}_n^2$.

التمرين 2 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 \in]-1, 0[\\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n}{\sqrt{2 + \mathcal{U}_n}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $-1 < \mathcal{U}_n < 0 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعا ثم استنتج ؟
3. بين أن : $\mathcal{U}_{n+1} \ge \frac{\mathcal{U}_n}{\sqrt{2 + \mathcal{U}_0}} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. بين أن : $\mathcal{U}_{n+1} \ge \frac{\mathcal{U}_0}{\left(\sqrt{2 + \mathcal{U}_0}\right)^n} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
5. استنتج $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

التمرين 3 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n + 1}{\sqrt{2\mathcal{U}_n^2 + 2}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ- أحسب الحدين $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.

ب- بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 1 - \mathcal{U}_{n+1} = \frac{(1 - \mathcal{U}_n)^2}{\left(\sqrt{2\mathcal{U}_n^2 + 2}\right)\left(\sqrt{2\mathcal{U}_n^2 + 2} + \mathcal{U}_n + 1\right)}$$

جـ- بين أن : $0 \le \mathcal{U}_n < 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. أ- بين أن : $\frac{|\mathcal{U}_n - 1|}{\sqrt{\mathcal{U}_n^2 + 1}} \le 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- استنتج أن : $|\mathcal{U}_{n+1} - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{U}_n - 1| \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

جـ- بين أن : $|\mathcal{U}_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

التمرين 4 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + \mathcal{U}_n^3}{8}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ- بين أن : $\mathcal{U}_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- استنتج أن : $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} < 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(لاحظ أن : $\left(\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{\mathcal{U}_n^3}\right) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

2. بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .
3. نضع : $\mathcal{V}_n = \frac{7}{8}\mathcal{U}_n^3 - \frac{1}{8} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$.

4. أحسب $\mathcal{U}_n$ بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.
5. حدد ، بدلالة n ، $S_n = \mathcal{U}_0^3 + \mathcal{U}_1^3 + \mathcal{U}_2^3 + ... + \mathcal{U}_n^3$.

التمرين 5 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt[3]{\mathcal{U}_n^3 + \frac{1}{2^n}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ونضع : $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_{n+1}^3 - \mathcal{U}_n^3 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. أ- بين أن : $\mathcal{V}_n = \frac{1}{2^n} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- ليكن $n \ge 1$. حدد ، بدلالة n ، المجموع : $S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + ... + \mathcal{V}_{n-1}$.

2. أ- بين أن : $S_n = \mathcal{U}_n^3 - 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

ب- استنتج $\mathcal{U}_n$ بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

التمرين 6 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n^3}{3\mathcal{U}_n^2+1} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n > 0$.

ب- بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_{n+1} \le \dfrac{1}{3}\mathcal{U}_n$.

ب- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$.

التمرين 7 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{3+\mathcal{U}_n^2}{1+\mathcal{U}_n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n > 0$.

2. أ- تحقق أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 3-\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n}\left(3-\mathcal{U}_n\right)$

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n < 3$.

3. بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعا واستنتج أنها متقاربة .

4. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \dfrac{\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} - \dfrac{3}{4} < 0$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0 < 3-\mathcal{U}_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \left(3-\mathcal{U}_0\right)$.

جـ- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$.

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = Arc\tan(x) - 2x$$

1. أ- أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

ب- استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad f(x) \le 0$.

2. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = a \\ \mathcal{U}_{n+1} = Arc\tan\left(\dfrac{\mathcal{U}_n}{4}\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

، حيث $a>0$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n > 0$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_{n+1} \le \dfrac{1}{2}\mathcal{U}_n$ ، ثم استنتج أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n \le \dfrac{a}{2^n}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$.

التمرين 9 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

1. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. أ- بين أن : $\forall x\in[1,+\infty[\quad : \quad f(x) \le x$.

ب- بين أن : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \quad : \quad \forall x\in]0,+\infty[$.

جـ- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1,+\infty[$.

بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

د- حدد الدالة العكسية g^{-1} .

3. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = g\left(\mathcal{U}_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 1 \le \mathcal{U}_n \le 2$.

ب- بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

جـ- استنتج أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{U}_n$.

التمرين 10 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad f(x) \le x$.

ب- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad f'(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

جـ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

2. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \dfrac{1}{2} \\ \mathcal{U}_{n+1} = f\left(\mathcal{U}_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0 < \mathcal{U}_n < 1$.

ب- بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة وأحسب نهايتها.

التمرين 11 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$$

1. أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad f(x) \le x$.

جـ- حدد $f([0,1])$.

2. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- تحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n \in [0,1]$.

ب- بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

التمرين 12 :

$\boxed{I}$ نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.
3. حدد المقاربين المائلين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
4. أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 0 .

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathcal{D}_f - \{0\}$.

جـ- أعط جدول تغيرات f .

5. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.

$\boxed{II}$ نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \frac{3}{2} \\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. تحقق مبيانيا أن :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad : \quad f(x) \geq x + \frac{1}{2}$$

2. استنتج أن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية .
3. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n \geq \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

التمرين 13 :

$\boxed{I}$ نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{1+\sqrt{x}}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f وأحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
3. أ- بين أن $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ وأول هندسيا النتيجة المحصلة .

ب- بين أن: $\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.

نقبل أن $(\mathcal{C}_f)$ ليست له أية نقطة انعطاف

$\boxed{II}$ نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_n > 1$.
2. أ- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \mathcal{U}_{n+1} - 1 = (\mathcal{U}_n - 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\left(1+\sqrt{\mathcal{U}_n}\right)^2}\right)$

ب- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{U}_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$.

وأن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \mathcal{U}_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ- استنتج $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$. $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$

التمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2 .$$

و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f وأحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة .
3. أحسب $f'(x)$ لكل $x > 0$ وأعط جدول تغيرات f .
4. أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta): \; y = x$.
5. أ- أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

ب- أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.

6. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < \mathcal{U}_n < 4$.

ب- أدرس رتابة المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$.

جـ- لتكن $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{V}_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{\mathcal{U}_n}}$$

بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم حدد $\mathcal{V}_n$ و $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .