Exercice n°01 :(04 pts)

⇨ On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

1 — **1)- a)-** Déterminer D_f .

1,5 — **b)-** Calculer : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1,5 — **2)-** la fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

Exercice n°02 :(05 pts)

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), f(x) = x^3 - 3x - 3 .$$

1,5 — **1)-** Dresser le tableau de variation de f .

1,5 — **2)-** Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$.

1 — **3)-** Montrer que : $\alpha = a + \dfrac{1}{a}$, où $a = \dfrac{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}}{2}$.

1 — **4)-** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(F) : \arctan\left(\sqrt{\tan^3 x - 3\tan x}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice n°03 :(07 pts)

⇨ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}\right) .$$

1,5 — **1)- a)-** Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

0,5 — **b)-** La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 1$?

2 — **2)-** Montrer que : $(\forall x\in[0,1[) ; f(x) = 2\arctan\left(\sqrt[4]{x}\right)$

Et que : $(\forall x\in]1,+\infty[) ; f(x) = 2\arctan\left(\sqrt[4]{x}\right) - \pi$.

Réalisé par Mr: ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : Charif al-idrissi / Benslimane / E-mail : abouzakariyamaths@gmail.com Tel : 06-67-74-56-58

| 1 |
| 0,75 |
| 1,25 |

3)- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un Intervalle J qu'on déterminera .

b)- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4)- Soient a_1, a_2 . . . et a_n des éléments de l'intervalle $]0,1[$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

✓ Montrer que : $(\exists! c]0,1[);\arctan\left(\dfrac{2\sqrt[4]{c}}{1-\sqrt{c}}\right) = \dfrac{2}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\sqrt[4]{a_k}\right)$.

Exercice n°04 :(04 pts)

| 0,75 |
| 1,75 |
| 1,5 |

⇨ Soit f la fonction définie sur $I = \left]-a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin(x+a)} \text{ , où } a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

1)- Calculer $\lim\limits_{x \to (-a)^+} f(x)$.

2)- Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera .

3)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercices Bonus :

Exercice n°01 :

| 1 |

⇨ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

✓ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(\sin x)}{x^n} = 0$.

Exercice n°02 :

| 2 |

⇨ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, tel que :

$$(\forall x \in [0,1]); f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x) .$$

✓ Montrer que : $(\forall x \in [0,1]); f(x) = 0$.

Exercice n°03 :

2

⇨ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$f_0 = 0 \ , \ f_1 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \ .$$

✓ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});(f_{n+1})^2 - f_n \times f_{n+2} = (-1)^n$, puis en déduire

Que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\arctan\left(\dfrac{1}{f_{2n}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{f_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{f_{2n+2}}\right)$.

Fin du sujet

Bon courage et bonne Chance