

الاشتقاق ودراسة الدوال العددية abdellahsabri@gmail.com	الدرس 2	علوم تجريبية - علوم رياضية	المستوى الثانوية باكالوريا
سلسلة تمارين رقم 1	الموضوع	الرياضيات	المادة

التمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{2}{x} & (x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} & (x \in [1, +\infty[) \end{cases}$$

- 1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 1$
- أ - بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ على اليسار .
- ب - بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ على اليمين (لاحظ أن $(1+x - 2\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - 1)^2$)
- أ - بين أن $f'(x) < 0 \quad (\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[)$

$$b. \text{ بين أن } f'(x) = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

ج . اعط جدول تغيرات الدالة .

- 4) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم $(0, i, j)$.
 - أ . ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .
 - ب . أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها 3)

التمرين 2:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي :

- 1) ادرس زوجية الدالة f .
- أ . حدد نهاية f عند $+\infty$ وأول النتيجة مبيانيا.
- ب . بين أن نهاية f في 0 على اليمين هي $+\infty$ وأول النتيجة مبيانيا.
- 3) بين أن f تناقصية قطعا على المجال $[0, +\infty[$.
- 4) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم.
- أ . بين أن (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها a يحقق :
- ب . أنشئ (C) .

التمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty]$ بـ :

$$f(x) = 6x^{\frac{2}{3}} - 4x$$

(1) احسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة.

(2) حدد الفرع الالانهائي لـ (C) منحني f .

(3) احسب (f') لكل x من $[0, +\infty]$ ثم حدد جدول تغيرات f .

(4) أـ. حدد نقطتي تقاطع (C) مع محور الأفاصيل.

بـ. حدد معادلة (Δ) ماس (C) في النقطة ذات الأقصول $\frac{27}{8}$.

جـ. أنشئ (Δ) و (C) في معلم متعمد منظم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة القياس 1 cm).

(5) قصور f على المجال $I = [1, +\infty)$.

بين أن g تقابل من I نحو مجال يتم تحديده. احسب $(g^{-1})'(0)$.

التمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

وليكن (C) تمثيلها المباني في معلم متعمد منظم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

بـ. ادرس الفرع الالانهائي للمنحني (C) .

(2) أـ. بين أن :

$$(\forall x \in [0, +\infty) ; f'(x) = \frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + 2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

بـ. اعط جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن f تقابل من $[0, +\infty)$ نحو مجال I يجب تحديده.

(4) أـ. بين أن المعادلة $0 = f(x)$ تقبل حل واحدا α بحيث $1 < \alpha < \frac{1}{2}$. (دون حساب α).

بـ. حدد نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

جـ. أنشئ (C) ثم (Δ) منحني الدالة f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

التمرين 5:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$ بما يلي :

$$f(x) = -x(\sqrt[3]{3x-1})^2$$

(1) بين أن :

$$f(x) = x \left[-1 + \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{x^3}} \right]$$

واستنتج . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$(2) \text{ أ. تحقق أن : } \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = -1 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3x-1}}$$

ب. ادرس اشتقاق f في $\frac{1}{3}$ على اليمين . وأول النتيجة مبيانا.

$$(3) \text{ ج. بين أن : } f'(x) = -1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}}$$

د. اعط جدول تغيرات الدالة f .

$$(4) \text{ باستعمال تغيرات الدالة } f, \text{ بين أن المعادلة : } x^3 - (3x-1)^2 = 0 \text{ تقبل حلين في المجال } \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$$

. $y = -x$ مقاربا معادلته

التمرين 6:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

و (C) تمثيلها المباني في معلم متعمد منظم $(\overrightarrow{O, i, j})$.

1) تتحقق أن الدالة f معرفة على \mathbb{R} ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ واعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

3) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

4) أ. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على \mathbb{R} .

ب. احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} وبين أن الدالة f تزايدية قطعا على \mathbb{R} .

ج. اعط جدول تغيرات الدالة f .

5) أ. اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الأفصول 0.

ب. أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن $f''(x) < 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$).

6) أ. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب. لتكن f^{-1} التقابل العكسي للدالة f , اعط جدول تغيرات الدالة f^{-1} .

ج. احسب $(f^{-1})'(0)$.

د. أنشئ (C) منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\overrightarrow{O, i, j})$.

التمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$f(x) = x - \sqrt{x-2}, x \geq 2$

$f(x) = \frac{x}{3-x}, x < 2$

(C) منحناها في معلم متعمد منظم $(\overrightarrow{O, i, j})$.

1) بين ان الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 2$.

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) أثبت أن $f'(2) = 3$, وأن (C) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في النقطة $x_0 = 2$ على اليمين.

(4) احسب $f'(x)$ على $[2, +\infty]$ ثم بين أن $f'(x) = \frac{2\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x-2}}$ لكل x من $[2, +\infty]$.

ب - ادرس إشارة $f'(x)$ على كل من $[-\infty, 2]$ و $[2, +\infty]$.

ج - استنتج أن الدالة f تناقصية على $\left[2, \frac{9}{4}\right]$ وتزايدية على كل من $[-\infty, 2]$ و $[\frac{9}{4}, +\infty]$.
د - كون جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين أن المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x$ اتجاه مقارب لـ C .

(6) أنشئ C (خذ $i = j = 2 \text{ cm}$).

(7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[2, \frac{9}{4}\right]$.

أ - بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب - حدد $(g^{-1})'(x)$ لكل x من J .

التمرين 8:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{1-x} + x - 4 & \text{إذا كان } x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} & \text{إذا كان } x \geq 0 \end{cases}$$

ليكن C منحني الدالة في معلم متعمد منظم (O, i, j) .

(1) تحقق من أن الدالة f متصلة في 0 .

(2) أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(3) أ - حدد الفرع الالهائي للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ج - حدد موقع المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) عندما يكون $x > 0$.

(4) ادرس قابلية الاشتتقاق على اليمين ثم على اليسار للدالة f في 0 .

(5) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على \mathbb{R}^* .

- بين أن لكل x من \mathbb{R}_+ : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2)^2}}$

- بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $f'(x) = \frac{-2 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$

(6) ضع جدول تغيرات الدالة f .

(7) أنشئ المنحني (C) نأخذ : $i = j = \vec{i} = \vec{j} = \frac{1}{2} \text{ cm}$ (لاحظ أن $f(-8) = 0$).

(8) لتكن الدالة g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty]$.

أ - بين أن g تقابل من $[0, +\infty]$ إلى مجال I ينبغي تحديده.

ب - أنشئ في نفس المعلم (O, i, j) منحني الدالة g^{-1} هو التقابل العكسي للدالة g .

التمرين 9:

- I - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-2, +\infty)$. ب :
- احسب $f(-2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1)
 - ادرس قابلية اشتتقاق f على اليمين في -2 .
 - بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[-2, +\infty)$.
 - بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} وحدد مجموعة تعريف f^{-1} .
 - أثبت أن : $f([0, 2]) \subset [0, 2]$. وأن 2 هو الحل الوحيد للمعادلة $x = f(x)$ في \mathbb{R} .
 - ليكن (C) منحني f و (C') منحني f^{-1} في معلم متعمد منظم $(j, i, \rightarrow, \rightarrow, O)$.
 - ادرس الفرع اللانهائي للمنحني (C) .
 - احسب المعامل الموجه لكل من مماس (C) و (C') مماس في النقطة ذات الأصول 2 .
 - أنشئ (C) و (C') .
- II - لتكن (u_n) المتالية العددية بحيث : $u_0 = 0$ و $u_n = f(u_{n-1})$ لكل n من \mathbb{N} .
- بين أن : $0 \leq u_n \leq 2$ مهما يكن n من \mathbb{N} .
 - بين أن المتالية (u_n) تزايدية.
 - استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين 10: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{IR} كالتالي :

$$f(x) = x^3 + x$$

- اعط جدول تغيرات الدالة f وأنشئ منحناها (C) في معلم متعمد منظم $(j, i, \rightarrow, \rightarrow, O)$. (1,5 ن)
- بين أن f تقبل دالة عكسية g معرفة على \mathbb{IR} ثم أنشئ (C_g) منحني الدالة g في المعلم $(j, i, \rightarrow, \rightarrow, O)$. (1 ن)
- بين أن : $x = g(x)$ [$g(x)]^3 + g(x)$] لكل x من \mathbb{IR} (تحديد (x) غير مطلوب) . (0,5 ن)
- احسب $(0) \cdot g$. (0,5 ن)

التمرين 11:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x بحيث :

$$f(x) = x \sqrt{\frac{|x| - 1}{|x| + 1}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعمد منظم $(j, i, \rightarrow, \rightarrow, O)$

- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي : $[1, +\infty) \cup [-\infty, -1]$ ثم ادرس زوجيتها . (1 ن)

- 2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 1 على اليمين وأول النتيجة مبيانية . (1 ن)
- 3- بين أن الدالة f تزايدية على المجال $[1, +\infty]$ ثم اعط جدول تغيراتها على D_f . (1,5 ن)
- 4- أ- بين أن $f(x) - x = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1}$ لكل x من المجال $[1, +\infty]$ ثم حدد الفرع اللانهائي لـ (C) بجوار $+\infty$. (1 ن)
- ب- انشئ (C) (دراسة التغير غير مطلوبة) . (1 ن)

التمرين 12:

نعتبر f الدالة المعرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$$

و (C) منحنى f في معلم متعمد ممنظم $(j, i, \rightarrow, \rightarrow, O)$

1- تحقق من أن مجموعة تعريف f هي $[0, +\infty] \cup [-1, 0]$ (0.5 ن)

2- a- احسب نهايات f عند الصفر على اليمين وعند الصفر على اليسار وعند $+\infty$. (0.75 ن)

b- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج ؟ (0.75 ن)

3- a- ادرس قابلية اشتقاق f عند $-1 = x_0$ على اليمين . (0.75 ن)

b- احسب $(x)^f$ على $D - \{-1\}$ واعط جدول تغيرات f على D (1 ن)

4- a- تحقق من أن : $f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{(\sqrt{x+1}-1)^2} \right]$. $\forall x \in D - \{-1\}$ (0.25 ن)

b- احسب $(x)^{f''}$ وبيان أن أقصى نقطة انعطاف (C) هو 8 . (1 ن)

5- انشئ مماس (C) في نقطة الانعطاف ثم انشئ (C) . $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$ (1 ن)

6- ليكن g قصور الدالة f على $I = [3, +\infty]$.

a- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يطلب تحديده . (0.5 ن)

b- احسب $\underline{(g^{-1})^{(7/2)}}$. (0.5 ن)

التمرين 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعمد ممنظم (j, i, O) .

1- حدد مجموعة التعريف D للدالة f . (0,5 ن)

2- احسب : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1 ن)

(لاحظ أن $x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(2 - \sqrt{2})$ لكل x من \mathbb{R}^+)

3- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. (1 ن)

4- أ- بين أنه لكل x من D : $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}\right)$. (1 ن)

ب- بين أنه لكل x من D : $\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} < 1$. (0,5 ن)

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f . (0,75 ن)

5- بين أن المعادلة $x = f(x)$ تقبل حلًا على الأقل في المجال $[1, \frac{1}{2}]$

6- ارسم المنحنى (C) . (1 ن)

7- ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0, 2]$. $I = [0, 2]$

أ- بين أن الدالة g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده. (0,5 ن)

ب- ارسم في المعلم (j, i, O) منحنى الدالة g^{-1} هو التقابل العكسي للتقابل g . (0,5 ن)

التمرين 14:

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

1- احسب نهايات f عند محدودات \mathbb{R}^* . (1 ن)

2- a- احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* . (1 ن)

b- بين أن إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R}^* هي إشارة $(1-x)x$. (0,5 ن)

c- اعط جدول تغيرات الدالة f . (1 ن)

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد ممنظم (j, i, O)

a- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) . (0,5 ن)

b- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) . (0,5 ن)

c- اعط معادلة ديكارتية لمساس المنحنى (C) في النقطة ذات الأقصول $(-1, -1)$. (0,5 ن)

d- ارسم المنحنى (C) . (1 ن)

4- نضع : $I = [1, +\infty)$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة من I نحو (I) كما يلي :

$$\forall x \in I ; g(x) = f(x)$$

a- حدد (I) f وبين أن g تقابل. (1 ن)

b- ارسم منحنى الدالة g^{-1} في المستوى المنسوب إلى المعلم (j, i, O) . (0,5 ن)