ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	تجريبي حول دالة اللوغاريتم النبيري	2 بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير

❖ تمرين رقم 01:

1)- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

أ- بين أن : $(\forall x \in]-1;1[);\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\});\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(2+\frac{2}{n-1}\right)$.

ج- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2)- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{3\times7} + \dots + \frac{1}{n\times(2n+1)}$.

✓ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);v_n = 2 - 2u_{n+1} + \frac{1}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

❖ تمرين رقم 02:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(0)=0 \text{ و } f(1)=1 \text{ و } (\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[);\ f(x) = \frac{x-1}{\ln x} .$$

1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر .

3)- أ- بين أن f متصلة في $x_0 = 1$.

ب- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $\varphi : t \mapsto \ln(t) - (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2$

أثبت أنه : $(\forall x \in]0;1[)(\exists c \in]x;1[);\frac{\varphi(x)}{x-1} = \frac{(c-1)^2}{c}$.

ج- إستنتج أن f قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0 = 1$ و حدد $f'_g(1)$.

د- بين أن : $(\forall x \in]1;+\infty[);\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)}{\frac{1}{x} - 1}$ ، ثم إستنتج أن f

قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0 = 1$ و حدد $f'_d(1)$.

ه- هل f قابلة للإشتقاق في $x_0 = 1$ ؟ أول النتيجة هندسيا .

4)- أ- بين أن : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[);\ f'(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{(\ln x)^2}$.

ب- بين أن : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[);\ln x > \frac{x-1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❖ تمرين رقم 03:

I- 1)- ليكن $x>0$ ، بتطبيق مبرهنة رول على الدالة :

$$\varphi : t \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)t^2-\left(\ln(1+t)-t\right)$$

أثبت أنه : $(\exists c\in]0;x[);\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{-1}{2(1+c)}$ ، ثم إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

2)- أحسب بنفس الطريقة النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$.

II- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $I_n=\left]\frac{-1}{n};+\infty\right[$ بما يلي :

$f_n(0)=n$ و $\left(\forall x\in \left]\frac{-1}{n};0\right[\cup]0;+\infty[\right);f_n(x)=\frac{\ln(1+nx)}{x}$.

1)- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{n}\right)^+}f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .

2)- أ- بين أن f_n متصلة على المجال I_n .

ب- بين أن f_n قابلة للإشتقاق في الصفر و أحسب $f_n'(0)$.

3)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in \left]\frac{-1}{n};0\right[\cup]0;+\infty[\right);f_n'(x)=\frac{g_n(x)}{x^2(1+nx)}$ ، حيث g_n هي الدالة المعرفة على I_n بما يلي : $g_n(x)=nx-(1+nx)\ln(1+nx)$.

ب- ضع جدول تغيرات الدلة g_n على I_n ، ثم إستنتج أن :

$\left(\forall x\in \left]\frac{-1}{n};0\right[\cup]0;+\infty[\right);g_n(x)<0$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f_n ، ثم أرسم المنحنى (C_{f_2}) في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$) .

4)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})(\exists! \alpha_n\in I_n);f_n(\alpha_n)=1$ و أن : $\alpha_n>0$.

ب- بين أن : $(\forall x\in]1;+\infty[);1-\frac{1}{x}<\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

ج- إستنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، لدينا :

$\ln(n)<\alpha_n<2\ln(n)$ و أن : $\ln(n)<\alpha_n<\ln\left(1+2n\ln(n)\right)$.

د- أحسب نهايتي كل من $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ و $\left(\frac{\alpha_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$.

III- ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ و F_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+);F_n(x)=G_n(nx)-G_n(x)$ ، حيث G_n دالة أصلية للدالة f_n على $\mathbb{R}^+$.

1)- بين أن الدالة F_n قابلةللإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن :

$F_n'(0)=n^2-n$ و $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F_n'(x)=\frac{\ln(1+n^2x)-\ln(1+nx)}{x}$.

2)- إستنتج منحى تغير الدالة F_n على $\mathbb{R}^+$.

3)- أ- بين أن : $(\forall x\in]0;+\infty[);(n-1)xf_n(nx)<F_n(x)<(n-1)xf_n(x)$.

ب- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F_n(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .

4)- أرسم المنحنى (C_{F_2}) في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❖ تمرين رقم 04:

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\ f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x\ .$$

1)- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2)- ضع جدول تغيرات الدالة f_n على $\mathbb{R}^{*+}$.

3)- بين أن المعادلة : $(E):f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث : $\alpha_n<1$.

4)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ f_n(\alpha_1)<0$ ، ثم إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\alpha_1\le\alpha_n$.

5)- بين أن : $(\forall x\in]0;1]);\frac{e^x-1}{x}\le e-1$ ، ثم إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ln(\alpha_n)\ge\frac{1-e}{n}$.

6)- أحسب كل نهاية مما يلي : $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$ و $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n$.

❖ تمرين إضافي:

✓ بين أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists! c_n\in]0;1[);\ln((c_n)^n+1)+c_n-1=0$.

✓ أدرس تقارب المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و أحسب نهايتها .

إنتهى الموضوع .