ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 03	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2014/2013	ذ : عبدالله بن لختير
		مدة الإنجاز : أربع ساعات

❖ تمرين رقم 01: (نقطتان إضافيتان)

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة بما يلي :

$$f_n(x)=\left(\sum_{k=0}^{2n}\sqrt{x+k-n}\right)-(2n+1)\sqrt{x} .$$

1)- حدد D_{f_n} ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$. — 1

2)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=f_n(n)$. — 1

❖ تمرين رقم 02: (4,75 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\ f(x)=5-\frac{\sqrt{3+x^2}}{x} .$$

1)- أ- بين أن f تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $]-\infty;4[$. — 0,75

ب- أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من $]-\infty;4[$. — 0,5

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in[1;+\infty[);\ f'(x)\leq\frac{3}{2}$. — 0,25

ب- إستنتج أن المعادلة : $(\mathrm{E}): f(x)=2x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$. — 0,75

ج- ضع جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)-2x$ على المجال $[1;+\infty[$. — 0,25

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$1\leq u_0<\alpha \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\frac{1}{2}f(u_n) .$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالفعل و أن : $(\forall n\in\mathbb{N});1\leq u_n<\alpha$. — 0,5

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و إستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب نهايتها . — 0,75

4)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R}^{**});\ f(\alpha_n)=u_n$. — 0,5

ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها بدلالة α . — 0,5

❖ تمرين رقم 03: (2,25 نقطة)

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ f_n(x)=\sqrt[n]{x}+Arc\tan x .$$

1)- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}_n): f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^+$ و أن $0<\alpha_n<1$. — 0,75

2)- أدرس رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq2}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة . — 0,75

3)- أحسب نهاية $(\alpha_n)_{n\geq2}$ معللا جوابك . — 0,75

❖ تمرين رقم 04: (03 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

لكل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{2n+1}{3^n}$ و $v_n=u_{n+1}-\dfrac{1}{3}u_n$.

0,5 **1)**- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

0,5 **2)**- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

0,75 **3)**- أحسب نهايتي كل من $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4)- لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، نضع : $S_n=1+\dfrac{5}{3^2}+\dfrac{7}{3^3}+\ldots+\dfrac{2n+1}{3^n}$.

0,5 أ- عبر عن المجموع : $\sum_{k=1}^{n-1}v_k$ بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

0,75 ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);S_n=2-\dfrac{1}{2}u_n-\dfrac{1}{2\times3^{n-1}}$ ، ثم أحسب نهاية $(S_n)_{n\geq2}$.

❖ تمرين رقم 05: (05 نقط)

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

0,5 **1)**- أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1;2\}\right);a_{n+1}\leq\dfrac{8}{9}a_n$.

0,75 ب- إستنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب النهايتين $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية بما يلي :

$u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=2u_n+n-1$.

0,75 **2)**- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\geq n$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- نعتبر المتتاليتين $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

لكل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k}{2^k}$ و $T_n=S_n+\dfrac{(n-2)^2}{2^n}$.

0,75 ✓ بين أن $(S_n)_{n\geq6}$ و $(T_n)_{n\geq6}$ متحاديتان ، ماذا تستنتج ؟

0,5 **4)**- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\dfrac{u_{n+1}-1}{2^n}=S_n$.

5)- لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$(\forall n\in\mathbb{N});v_n=u_n+n$.

0,5 أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

0,5 ب- عبر عن v_n ، ثم u_n بدلالة n لكل $n\in\mathbb{N}$.

0,75 **5)**- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k}{2^k}=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$ ، ثم إستنتج نهاية كل من $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❖ **تمرين رقم 06:** (05 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{n}{2^n}$.

1- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة . | 0,5

2- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2^{n+1}}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. | 0,5

⇦ لتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

3- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}_n):\ f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^{*+}$. | 0,5

4- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ f_n(\alpha_{n+1})=1-(n+1)(\alpha_{n+1})^{n+1}$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq2}$. | 0,75

5- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+-\{1\});\ f_n(x)=\frac{x\left(1-(n+1)x^n+nx^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$. | 0,75

6- أحسب α_2 ، ثم إستنتج النهايتين : $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}n(\alpha_n)^n$. | 1

7- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq2}$ متقاربة و أحسب نهايتها . | 1

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

■ **خطوة نحو الأقسام التحضيرية :**

■ **خطوة رقم 01:**

⇦ لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$a_1=2$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_{n+1}=a_n+\sqrt{1+\frac{a_n}{n}}$.

✓ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{a_n}{n}$ متقاربة .

■ **خطوة رقم 02:**

⇦ لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليات المعرفة بما يلي :

$a_0>b_0>c_0>0$ و $(\forall n\in\mathbb{N});a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}$.

$(\forall n\in\mathbb{N});b_{n+1}=\sqrt[3]{a_n.b_n.c_n}$ و $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{1}{c_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}\right)$.

1- بين أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان .

2- أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}b_n=L$ ، حيث L هي النهاية المشتركة لكل من $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ **خطوة رقم 03:**

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}$ و $v_n=\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{E}\left(k\sqrt{k}\right)}{k\sqrt{k}}$.

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

2)- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **خطوة رقم 04:**

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x)=(x-n)^3+(x-n+1)^3+\dots+x^3-(x+1)^3-(x+2)^3-\dots-(x+n)^3 .$$

1)- بين أنه : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R}\right);f_n(\alpha_n)=0$.

2)- أحسب كل نهاية مما يلي : $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_n}{3n(n+1)}\right)$.

■ **خطوة رقم 05:**

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0=0 \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\frac{1}{4}+(u_n)^2 .$$

1)- بين أنه : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{2}$.

2)- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=\sum_{k=0}^{n}u_k\left(u_k-\frac{1}{2}\right)^2$ ، بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

■ **خطوة رقم 06:**

⇦ لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية حدودها موجبة قطعا و تحقق : $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=1$.

✓ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{n+k}}$ متقاربة .

Tel : 06-62-06-90-66