ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 3	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2017/2016	ذ : عبدالله بن الختير
		مدة الإنجاز : أربع ساعات

❖ تمرين رقم 01: (3,5 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), f(x)=x.\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).$$

1)- بين أن الدالة f زوجية .

2)- بين أن f دالة أصلية للدالة Arctan على $\mathbb{R}$.

3)- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في إتجاه مستقيم (Δ) ينبغي تحديده .

4)- ضع جدول تغيرات f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=\frac{1}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)$.

أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن :

$$(\forall k\in\{1,2,\ldots,n\}), f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}.\text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right).$$

ب- استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), f(1)-f(0)\leq S_n\leq f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$ ، ثم بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

❖ تمرين رقم 02: (3,5 نقطة)

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f_n(x)=-nx+\ln x.$$

1)- أ- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f_n'(x)=\frac{-nx+1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f_n .

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), \ln x<2x-1$.

ب- بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x)=-2n$ تقبل بالضبط حلين إثنين u_n و v_n في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث : $0<u_n<\frac{1}{n}$ و $v_n>2$.

3)- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{e^2}$.

4)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), f_{n+1}(v_n)<-2(n+1)$ ، ثم إستنتج رتابة $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ب- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها .

ج- احسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(v_n-2)}{\ln 2}$.

❖ تمرين رقم 03: (6,5 نقطة)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+), f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{e^{\sqrt{x}}+1} .$$

1)- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أ- ادرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر .

ب- بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

3)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4)- تحقق أن f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}^+$.

II- لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), G(x)=\frac{F(4x^2)-F(x^2)}{x} \text{ و } G(0)=0 .$$

1)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), 3x.f(x^2)\leq G(x)\leq 3x.f(4x^2)$.

2)- ادرس إتصال و قابلية إشتقاق G على اليمين في الصفر.

3)- احسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)-3x$.

4)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), G'(x)=8.f(4x^2)-2.f(x^2)-\frac{G(x)}{x}$.

ب- استنتج أن G تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

5)- أ- بين أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})(\exists c\in]x,2x[), G(x)=2c.f(c^2)$.

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{c}{x}=\frac{3}{2}$.

❖ تمرين رقم 04: (6,5 نقطة)

▪ الجزء الأول:

⇦ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), f(x)=1-e^{-x} .$$

1)- أ- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

ب- ادرس إشارة الفرق $f(x)-x$ على $\mathbb{R}$.

2)- بين أن المعادلة : $(E): f(x)=1-x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن : $\frac{1}{e}<\alpha<1$.

3)- أ- بين أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})(\exists c\in]0,x[), \frac{x-f(x)}{x^2}=\frac{1-e^{-c}}{2c}$.

ب- استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-f(x)}{x^2}$.

■ **الجزء الثاني :**

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

1)– أ– بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n > 0$.

ب– بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

ج– احسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}), v_n = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{(u_n)^2}$.

2)– لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} w_0 \in \left]\dfrac{1}{e}, 1\right[\\ (\forall n\in\mathbb{N}), w_{n+1} = 1 - f(w_n) \end{cases} .$$

أ– بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), \dfrac{1}{e} < w_n < 1$.

ب– بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), |w_{n+1} - \alpha| \le e^{-\frac{1}{e}} \times |w_n - \alpha|$ ، ثم إستنتج أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **الجزء الثالث:**

1)– بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f(x) = 1 - x^n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]0,1[$.

2)– بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

3)– بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), \dfrac{-1}{n} < \ln(\alpha_n) < 0$ ، ثم إستنتج نهاية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4)– احسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\alpha_n)$.

➢ **تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .**