أهداف الدرس

- تعرف تحويل $cos(a-b)$.
- التمكن من تحويل $cos(2a)$ و $sin(2a)$.
- تعرف صيغ الإخطاط.
- تعرف تحويل جداءات إلى مجاميع.
- تعرف تحويل مجاميع إلى جداءات.
- تحويل $tan(a+b)$ و نتائجها.
- التمكن من تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$.
- توظيف صيغ التحويل في تبسيط تعابير مثلثية وحل معادلات و متراجحات مثلثية.
- تمثيل و قراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية.

القدرات المنتظرة

- التمكن من مختلف صيغ التحويل.
- التمكن من حل معادلات و متراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات و المتراجحات الأساسية.
- التمكن من تمثيل و قراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.

فقرات الدرس

- تحويل $cos(a-b)$.
  - تحويل $cos(a-b)$ ونتائجها
  - نتائج: تحويل $\cos 2a$ و $\sin 2a$ وصيغ الإخطاط
  - تحويل جداءات إلى مجاميع.
  - تحويل مجاميع إلى جداءات
- تحويل $tan(a+b)$
  - تحويل $tan(a+b)$ و $tan(a-b)$
  - تحويل $tan(2a)$
- تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$

I)- تحويل $cos(a-b)$.

1)- تحويل $cos(a-b)$ ونتائجها

نشاط01

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O,I,J) و(C) الدائرة المثلثية المرتبطة به.

ليكن a و b عددين حقيقيين.

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من الدائرة (C).

1) – بين أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=b-a[2\pi]$

ثم استنتج أن $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=cos(b-a)$.

2) أ– باستعمال الصيغة التحليلية للجداء السلمي أحسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

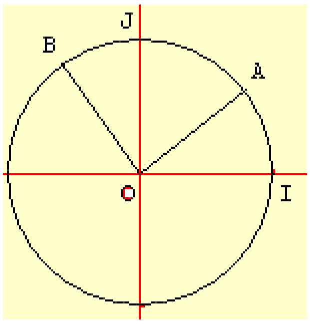
ب- استنتج أن: $cos(a-b)=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b \quad (1)$

3) – استنتج الصيغ التالية:

$$(2)\quad cos(a+b)=cos\,a\,cos\,b-sin\,a\,sin\,b$$

$$(3)\quad sin(a-b)=sin\,a\,cos\,b-cos\,a\,sin\,b$$

$$(4)\quad sin(a+b)=sin\,a\,cos\,b+cos\,a\,sin\,b$$



مثال

أحسب $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. (لاحظ أن: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$).

أحسب $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. (لاحظ أن: $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$).

2)- نتائج: تحويل $cos\,2a$ و $sin\,2a$ وصيغ الإخطاط

- تحويل $cos\,2a$: في الصيغة (2) نأخذ $a=b$ ونحصل على:

$$cos(2a)=cos^2 a-sin^2 a=2cos^2-1=1-2sin^2 a \quad (5)$$

- تحويل $sin\,2a$: في الصيغة (4) نأخذ $a=b$ ونحصل على:

$$(6)\quad sin\,2a=2\,sin\,a\,cos\,a$$

- إخطاط: $cos^2 a$ و $sin^2 a$: من الصيغة (5) نحصل على:

$$(8)\quad sin^2 a=\frac{1-cos\,2a}{2} \quad \text{و} \quad (7)\quad cos^2 a=\frac{1+cos\,2a}{2}$$

مثال

أحسب $cos\frac{\pi}{8}$ و $sin\frac{\pi}{8}$. (لاحظ أن $\frac{\pi}{8}=2.\frac{\pi}{4}$).

ملاحظة

يمكن كتابة الصيغتين (5) و(6) على الشكل:

$$(6)\quad sin\,a=2\,sin\frac{a}{2}cos\frac{a}{2} \quad \text{و} \quad (5)\quad cos\,a=2\,cos^2\frac{a}{2}-1=1-2\,sin^2\frac{a}{2}.$$

تمرين

ليكن $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. بين أن $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

تمرين

نضع: $\forall x \in \mathbb{R}, A(x) = \cos x \cos 2x \cos 4x$.

1)- بين أن: $\sin x . A(x) = \frac{1}{8}\sin(8x)$.

2)- استنتج أن: $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{9}$.

3)- تحويل جداءات إلى مجاميع.

ليكن a و b عددين حقيقيين.

- باستعمال العلاقتين (1) و (2) نحصل على :

$$(8) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$(9) \quad \sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

- باستعمال العلاقتين (3) و (4) نحصل على :

$$(10) \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$(11) \quad \cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

4)- تحويل مجاميع إلى جداءات

نضع: $p = a+b$ و $a-b$ و منه $a = \frac{p+q}{2}$ و $b = \frac{p-q}{2}$.

من العلاقة (8) نحصل على : $$(12) \quad \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

من العلاقة (9) نحصل على : $$(13) \quad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

من العلاقة (10) نحصل على : $$(14) \quad \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

من العلاقة (11) نحصل على : $$(15) \quad \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

III- تحويل $\tan(a+b)$

1- تحويل $\tan(a+b)$ و $\tan(a-b)$

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$.

- نفترض أن $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

لدينا: $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$ (من العلاقتين (2) و (4))

$$=\dfrac{\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

ومنه نستنتج أن:
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \quad (16)$$

- نفترض أن $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

بنفس الطريقة بين أن:
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \quad (17)$$

مثال

أحسب $\tan\frac{5\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$. لاحظ أن: $\left(\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

2- نتائج

- تحويل $\tan(2a)$

IV- تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $(a,b)\neq(0,0)$.

لدينا: $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

و بما أن : $\left|\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ و $\left|\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ و $\left[\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\right]$ فإنه:

يوجد عددين حقيقيين α و β بحيث: $\left(\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\right)$

على التوالي $\left(\begin{cases}\cos\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\right)$

و بالتالي: $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\sin\beta+\sin x\cos\beta\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\beta\right)$$

تمرين

- بين أن: $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
- حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $[0,2\pi]$ المعادلة $(E): \cos x-\sqrt{3}\sin x=-1$.
- حل في المجال $[0,\pi]$ المتراجحة: $(I): \cos 2x-\sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2}$