Durée : 4 heures

Exercice 01 : (03 points)

⇨ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante :

$$(E) : z^2-\left(1+im+\overline{m}\right)z+\overline{m}+i\left|m\right|^2=0 \text{ , où } m\in\mathbb{C}^*-\{i\} .$$

0,25 — **1)- a)-** Vérifier que $u=\overline{m}$ est solution de l'équation (E) .

0,25 — **b)-** En déduire que l'autre solution de l'équation (E) est : $v=1+im$.

2)- On suppose dans cette question que : $m=e^{i.\theta}$ ou $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

0,5 — ✓ Ecrire le nombre complexe $\frac{v}{u}$ sous forme trigonométrique .

3)- Dans le plan complexe n on considère les points : $A(u)$ et $B(v)$.

0,25 — ✓ Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tel que : $\overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

4)- On suppose que : $m=a+\frac{1}{2}i$ ou $a\in\mathbb{R}$. et on considère la transformation R

Qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tel que : $z'=-iz+1+2ia$.

0,75 — **a)-** Montrer que R est une rotation en précisant l'affixe de son centre Ω et donner Une mesure de son angle .

0,5 — **b)-** Montrer que : $R(A)=B$, puis en déduire que : $\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}=-i$.

0,5 — **c)-** Montrer que les points O , A , B et Ω sont cocycliques .

Exercice 02 : (04 points)

⇨ On rappel que $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire et que $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel .

I- On pose : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & b\\ b & a+b\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,25 — **1)-** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel .

2)- On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

0,5 — ✓ Montrer que (I,J) est une base de $(E,+,\cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

Durée : 4 heures

0,5 — **3)-** Vérifier que : $J^2=2.J$, puis montrer que E est stable dans $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

0,75 — **4)-** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire non intègre .

0,5 — **5)-** Montrer que la matrice $M(a,b)$ est inversible dans $(E,+,\times)$ si et seulement si : $a\neq 0$ et $a\neq -2b$.

II- On considère l'ensemble :

$$F=\left\{A(x)=I+\frac{3^x-1}{2}.J \;/\; x\in\mathbb{Z}\right\} .$$

0,25 — **1)-** Montrer que F est une partie stable de $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

2)- Pout tout $x\in\mathbb{Z}$, on pose : $f(x)=A(x)$.

0,5 — **a)-** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers $(F,\times)$.

0,75 — **b)-** En déduire la structure de $(F,\times)$ et préciser son élément neutre et l'inverse de la matrice $A(x)$ pour tout $x\in\mathbb{Z}$.

Exercice 03 : (03 points)

0,5 — **1)- a)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(E) : 4x-5y=1$.

0,5 — **b)-** En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$, du système : $(S) : \begin{cases}x\equiv 3[5]\\ x\equiv 2[4]\end{cases}$.

2)- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, On pose : $a=4n+3$ et $b=3n+1$.

0,5 — **a)-** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}), a\wedge b=(n+2)\wedge 5$, puis en déduire les valeurs de l'entier naturel n tel que : $(\forall n\in\mathbb{N}), a\wedge b=5$.

0,5 — **b)-** Montrer que : $2^a+3^b\equiv 0[5] \Leftrightarrow 2^{a+b}\equiv 4[5]$.

0,5 — **c)-** Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $(S') : \begin{cases}n\geq 2018\\ 2^a+3^b\equiv 0[5]\\ a\wedge b=5\end{cases}$.

3)- Soit $p\geq 5$ un nombre <u>premier</u> .

0,5 — ✓ Montrer que : $2^p+3^p\equiv 0[p] \Leftrightarrow p=5$.

Exercice 04 : (03 points)

I- On considère la fonction F définie sur $]0,1]$ par :

$$(\forall x \in]0,1]), F(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

0,5 **1)-** Montrer que : $(\forall x \in]0,1]), F(x) \geq \frac{-\ln x}{e}$, puis en déduire $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

0,5 **2)-** Montrer que F est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$.

0,5 **3)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! u_n \in]0,1[), F(u_n) = n$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

II- Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g(0) = -1 \text{ et } (\forall t \in]0,1]), g(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t} .$$

0,5 **1)-** Montrer que g est continue sur l'intervalle $[0,1]$.

2)- Pour tout $x \in [0,1]$, on pose : $G(x) = \int_x^1 g(t) dt$.

0,25 **a)-** Montrer que G est continue sur $[0,1]$.

0,75 **b)-** Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), G(u_n) = n + \ln(u_n)$, puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} e^n . u_n$.

Exercice 05 : (07 points)

I- On considère la fonction f définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{e^x}{e^x - \ln x}, x > 0 .$$

0,75 **1)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), x - 1 \geq \ln x$, puis en déduire que : $D_f = \mathbb{R}^+$.

0,5 **2)-** Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,25 **3)- a)-** Montrer que est f continue à droite en 0 .

0,5 **b)-** la fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter le résultat .

Durée : 4 heures

0,75 **4)- a)-** Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[), f'(x) = \frac{g(x).e^x}{(e^x - \ln x)^2} \text{ , ou } g(x) = \frac{1}{x} - \ln x .$$

0,75 **b)-** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a dans $]0,+\infty[$ et que $a \in]1,2[$.

0,5 **c)-** En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .

0,5 **5)-** Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (on donne $a \simeq 1,5$) .

II- On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0,+\infty[), F(x) = \frac{1}{x} . \int_x^{2.x} f(t) dt .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0, \frac{a}{2}\right]\right), f(x) \leq F(x) \leq f(2.x)$.

0,75 **b)-** En déduire que F est continue à droite en 0 , puis étudier la dérivabilité de F à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat .

0,25 **2)- a)-** Montrer que : $(\forall x \in [a,+\infty[), f(2.x) \leq F(x) \leq f(x)$.

0,5 **b)-** En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,5 **3)-** Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[), F'(x) = \frac{2.f(2.x) - F(x) - f(x)}{x} .$$

Fin Du Sujet .