

تصحيح الفرض المنزلي رقم 1

مادة الرياضيات الدورة الأولى

2014/2015

Svt - pc

إعداد وإنجاز : ذ. أضر ضرور مصطفى

www.facebook.com/jaime.maath

Gsm : 0638.651084

لا تنسونا بدعواتكم و بالتوفيق للجميع

صفحة الإعجابات : www.facebook.com/aderdour

التمرين الأول :

1- حل في \mathbb{R} المعادلة التالية : $2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20$

2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}} = 1$ ثم أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

3- قارن العددين $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}}$ و $\sqrt{4\sqrt{3}}$ ثم بين أن العدد $A = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ عدد صحيح طبيعي

4- نعتبر u الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بمايلي : $u(x) = x^3 - x - 1$

أ- بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً و حيداً α على المجال $[1, 2]$

ب- باستعمال طريقة التفرع الثنائي إعط تأطيراً للعدد α سعته $2,5 \times 10^{-1}$

التمرين الثاني :

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال \mathbb{R}

و g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بمايلي : $g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 1) \cdot f(x) - 2\sqrt[3]{x} + 1$

1- بين أن الدالة g متصلة على \mathbb{R}^+ و تحقق أن $g(0) \cdot g(1) < 0$

2- إستنتج أن : $\exists \alpha \in [0, 1] ; f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha} - 1}$

التمرين الثالث :

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1- تحقق أن مجموعة تعريف الدالة f هي $[1, +\infty[$

2- بين أن الدالة f متصلة وقابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 2$

3- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و إستنتج معادلة المقارب الأفقي

3- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + 1}{x - 1} = +\infty$ ثم أول النتيجة تحليلياً و هندسياً

4- تحقق أن : $f'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}}$ لكل x من $]1, +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها

5- أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من J نحو $[1, +\infty[$ (J يتم تحديده)

ب- علل وجود العدد $(f^{-1})'(-\frac{1}{2})$ ثم حدد قيمته (تذكر أن : $f(2) = -\frac{1}{2}$)

6- بين أن : $f^{-1}(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2}$ لكل x من J

7- أنشئ (\mathcal{C}_f) و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

التمرين الأول

1- حل في \mathbb{R} المعادلة التالية : $(E): 2x\sqrt{x} - 3x^4\sqrt{\frac{1}{x}} = 20$

لدينا : $D_E =]0, +\infty[$ ونضع $t = \sqrt[4]{x}$ ومنه $t^4 = x$
إذن المعادلة تصبح كمايلي :

$$(E) \Leftrightarrow 2t^4\sqrt{t^4} - 3t^4\sqrt{\frac{1}{t^4}} = 20 \Leftrightarrow 2t^4t^2 - 3t^4\frac{1}{t} = 20 \Leftrightarrow 2t^6 - 3t^3 = 20 \Leftrightarrow 2(t^3)^2 - 3t^3 - 20 = 0$$

نضع : $t^3 = X$

ومنه : $(E) \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 20 = 0$ وعند حساب المميز ديلتا نجد : $\Delta = 169$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3+13}{4} = 4 \\ X_2 = \frac{3-13}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 4 \\ t^3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 4 \\ -t^3 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 4 \\ (-t)^3 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[3]{4} \\ t = -\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[4]{x} = -\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

يعني

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4^4} \\ x = \left(-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4^4} \\ x = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow S = \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^4, \sqrt[3]{4^4} \right\}$$

2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}} = 1$ ثم أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

❖ لنحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}}$

نضع $t = \sqrt[12]{x+1} \Leftrightarrow t^{12} - 1 = x$ بحيث t يؤول إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{t^{12} - 1 + 1} - \sqrt{t^{12} - 1 + 1}}{\sqrt[4]{t^{12} - 1 + 1} - \sqrt{t^{12} - 1 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}} - \sqrt{t^{12}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^4 - t^6}{t^3 - t^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-t^6}{-t^6} = 1$$
 إذن :

❖ لنحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x} \right)} = 0$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 0$

❖ لنحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1) = 3 \times 2 = 6$$

3- قارن العددين $\sqrt[3]{3^3 \cdot 4}$ و $\sqrt{4 \cdot 3}$ ثم بين أن العدد $A = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ عدد صحيح طبيعي

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{4\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{16 \times 3}} = \sqrt{\sqrt{48}} = \sqrt[4]{48} = \sqrt[36]{(48)^9} \\ \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{108}} = \sqrt[9]{108} = \sqrt[36]{(108)^4} \end{array} \right. \rightarrow \sqrt{4\sqrt{3}} > \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}} \quad \text{لدينا :}$$

$$\bullet A = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{32}} \cdot \sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[6]{2^7}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[12]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^7}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{7}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{7-1}{3}} = 2^2 = 4 \in \mathbb{R}$$

4- نعتبر u الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بمايلي : $u(x) = x^3 - x - 1$

أ- بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلاً و حيداً α على المجال $[1,2]$

لدينا الدالة u متصلة على \mathbb{R} وبالخصوص على المجال $[1,2]$
لدينا الدالة u تزايدية على المجال $[1,2]$ (يتم حساب المشتقة وإنشاء جدول التغيرات)

ولدينا $f(1) = -1$ و $f(2) = 5$ و بالتالي $f(1) \cdot f(2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة لدينا $u(x) = 0$ تقبل حلاً و حيداً α على المجال $[1,2]$

ب- باستعمال طريقة التفرع الثنائي إعط تأطيراً للعدد α سعته $2,5 \times 10^{-1}$

لدينا $f(1) = -1$ و $f(2) = 5$ و $[1,2]$

✓ $[1,2]$ مركزه $\frac{3}{2}$ و منه $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8}$ و بالتالي : $\alpha \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ سعة المجال المحصل عليه هو 0,5

✓ $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ مركزه $\frac{5}{4}$ و منه $f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{19}{64}$ و بالتالي : $\alpha \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ سعة هذا المجال هي 0,25

التمرين الثاني

1- بين أن الدالة g متصلة على \mathbb{R}^+ و تحقق أن $g(0) \cdot g(1) < 0$

✓ لدينا الدالة f متصلة على \mathbb{R} حسب المعطيات وبالخصوص \mathbb{R}^+

ولدينا $x \rightarrow \sqrt[3]{x} - 1$ و منه $x \rightarrow \sqrt[3]{x} - 1$ و $x \rightarrow -2\sqrt[3]{x} + 1$ متصلتين في \mathbb{R}^+

و بمأن : جداء و جمع دوال متصلة على \mathbb{R}^+

فإن الدالة g متصلة على \mathbb{R}^+

$$g(0) \cdot g(1) < 0 \quad \text{و بالتالي :} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(0) = \sqrt[3]{0} \cdot (\sqrt[3]{0} - 1) \cdot f(0) - 2\sqrt[3]{0} + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 \\ g(1) = \sqrt[3]{1} \cdot (\sqrt[3]{1} - 1) \cdot f(1) - 2\sqrt[3]{1} + 1 = 0 - 2 + 1 = -1 \end{array} \right. \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

2- إستنتج أن : $\exists \alpha \in [0,1] ; f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha} - 1}$

حسب مبرهنة القيم الوسيطة مما سبق فإن : $\exists \alpha \in [0,1] ; g(\alpha) = 0$

و بالتالي :

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1) \cdot f(\alpha) - 2\sqrt[3]{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1) \cdot f(\alpha) = 2\sqrt[3]{\alpha} - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\sqrt[3]{\alpha} - 1}{\sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1)}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} - 1}{\sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1)} \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1)} + \frac{\sqrt[3]{\alpha} - 1}{\sqrt[3]{\alpha} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} - 1)} \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\alpha} - 1)} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$$

التمرين الثالث

1- تحقق أن مجموعة تعريف الدالة f هي $[1, +\infty[$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0\} \cup \{2\}$$

لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ et } x \neq 2\} \cup \{2\}$ ملاحظة أدخلنا الرقم 2 لأن صورته موجودة ح. المعطيات

$$D_f = [1, +\infty[$$

2- بين أن الدالة f متصلة وقابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1^2 - (\sqrt{x-1})^2}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1^2 - (x-1)}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x + 1}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{1 + \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2} = f(2) \end{aligned}$$

ومن الدالة f متصلة في النقطة 2

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} + \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2(1 - \sqrt{x-1}) + x - 2}{2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(1 - \sqrt{x-1}) + x - 2}{2(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 2\sqrt{x-1} + x - 2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\sqrt{x-1} + x}{2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4(x-1)}{2(x-2)^2(x+2\sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2(x-2)^2(x+2\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{2(x-2)^2(x+2\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2(x+2\sqrt{x-1})} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

و بالتالي الدالة f تقبل الإشتقاق في النقطة 2

3- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وإستنتج معادلة المقارب الأفقي

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1^2 - (\sqrt{x-1})^2}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1^2 - (x-1)}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + 1}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(x-2)}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{x-1}} = 0 \end{aligned}$$

ومن (ζ_f) يقبل مقارب أفقي معادلته : $y = 0$

4- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1} = +\infty$ ثم أول النتيجة تحليلياً و هندسياً

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - \sqrt{x-1} + x - 2}{x-2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x-1} + x - 2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \sqrt{x-1} - 1}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - \sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} - \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-2} - \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-2)} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)^2}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-2)} - \sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}} \cdot \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-2)} - \sqrt{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-2)} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

و بالتالي فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق يمين النقطة 1 و (ζ_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى

5- تحقق أن : $f'(x) = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}}$ لكل x من $]1, +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} \right)' = \frac{(1-\sqrt{x-1})'(x-2) - (1-\sqrt{x-1})(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-2) - (1-\sqrt{x-1})}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-\frac{(x-2)}{2\sqrt{x-1}} - (1-\sqrt{x-1})}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2) - 2\sqrt{x-1}(1-\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}(x-2)^2} = \frac{-x+2-2\sqrt{x-1}+2(x-1)}{2\sqrt{x-1}(x-2)^2}$$

$$= \frac{-x+2-2\sqrt{x-1}+2x-2}{2\sqrt{x-1}(x-2)^2} = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}(x-2)^2} \quad \text{ومنه :}$$

لنحدد جدول التغيرات

$$\bullet f'(x) = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{x^2-4(x-1)}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})} = \frac{x^2-4x+4}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}$$

لدينا

$$= \frac{(x-2)^2}{2(x-2)^2 \cdot \sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})} > 0$$

يعني أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $]1, +\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

6- أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من J نحو $]1, +\infty[$ (J يتم تحديده)

لدينا الدالة f متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]1, +\infty[$ إذن تقبل دالة عكسية معرفة على J

$$\text{بحيث أن : } J = f(]1, +\infty[) = [-1, 0[$$

ب- علل وجود العدد $(f^{-1})'(-\frac{1}{2})$ ثم حدد قيمته (تذكر أن : $f(2) = -\frac{1}{2}$)

حسب الخاصية

✓ لدينا f تقبل الإشتقاق في النقطة 2 بحيث أن $f'(2) \neq 0$ ومنه العدد $(f^{-1})'(-\frac{1}{2})$ موجود

✓ باستعمال خاصية مشتقة الدالة العكسية لدينا : $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

7- بين أن : $f^{-1}(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2}$ لكل x من J

$\forall x \in J ; \forall y \in I$

لدينا : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{y-1}}{y-2} = x$

$\Leftrightarrow \frac{1 - (y-1)}{(y-2)(1 + \sqrt{y-1})} = x \Leftrightarrow \frac{2-y}{(y-2)(1 + \sqrt{y-1})} = x \Leftrightarrow \frac{-(y-2)}{(y-2)(1 + \sqrt{y-1})} = x \Leftrightarrow \frac{-1}{1 + \sqrt{y-1}} = x$

$\Leftrightarrow -1 = x(1 + \sqrt{y-1}) \Leftrightarrow -1 = x + x\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \frac{-1-x}{x} \Leftrightarrow (\sqrt{y-1})^2 = \left(\frac{-1-x}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow y-1 = \frac{(1+x)^2}{x^2} \Leftrightarrow y-1 = \frac{1+2x+x^2}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1+2x+x^2}{x^2} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1+2x+2x^2}{x^2}$

و بالتالي : $f^{-1}(x) = \frac{1+2x+2x^2}{x^2}$

8- أنشئ (ξ_f) و $(\xi_{f^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

