| 2 بكالوريا علوم رياضية | فرض محروس رقم 04 | ثانوية موسى بن نصير |
| --- | --- | --- |
| مدة الانجاز : ساعتان | الدورة الأولى : 2011/2010 | نيابة الخميسات |

⇦ في كل ما يلي المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

## ■ التمرين رقم 01: $(06pts)$

1)- حدد و أنشىء في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ المجموعة :

$$(D)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{z}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}.$$

2)- لكل $z$ من $\mathbb{C}$ ، نضع : $\mathrm{F}(z)=5z^2+3z\bar{z}+20i$ .

⇦ حدد و أنشىء في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ المجموعتين :

$(\Sigma)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});\mathrm{F}(z)\in i\mathbb{R}\right\}$ و $(\mathrm{H})=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});\mathrm{F}(z)\in\mathbb{R}\right\}$ .

## ■ التمرين رقم 02: $(06pts)$

نعتبر العددين العقديين : $\alpha=1+i$ و $\beta=1-i$ .

1)- أكتب كلا من $\alpha$ و $\beta$ على الشكل المثلثي .

2)- ليكن $n$ من $\mathbb{Z}$ و لتكن $A$ و $B$ النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي $\alpha^n$ و $\beta$ .

أ- حدد عمدة للعدد العقدي : $u=\dfrac{\alpha^n}{\beta}$ ، ثم إستنتج قيم العدد النسبي $n$ التي من أجلها تكون النقط $O$ و $A$ و $B$ مستقيمية .

ب- حدد قيم العدد النسبي $n$ التي من أجلها يكون المثلث $OAB$ قائم الزاوية في النقطة $O$ .

## ■ التمرين رقم 03: $(08pts)$

لكل $z$ من $\mathbb{C}-\{-i\}$ ، نضع : $f(z)=\dfrac{z+1}{-i(z+i)}$ .

1)- أكتب $f(i)$ على الشكل المثلثي .

2)- حدد و أنشىء في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ مجموعات النقط التالية :

$(\mathrm{E}_1)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});f(z)\in\mathbb{R}\right\}$ و $(\mathrm{E}_2)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});f(z)\in i\mathbb{R}\right\}$

و $(\mathrm{E}_3)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});|f(z)|=1\right\}$ .

3)- بين أنه عندما تتغير النقطة $M(z)$ على الدائرة $(C)$ التي مركزها $A(-i)$ و شعاعها $r=1$ فإن النقطة $M'$ ذات اللحق $z'=f(z)$ تتغير على دائرة $(C')$ ينبغي تحديد شعاعها ولحق مركزها .

إنتهى الموضوع .

⇦ تمارين إضافية :

■ **التمرين رقم 01:**

ليكن $f$ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$f(z)=az+(1+i)(1-a) \text{ ، حيث } a=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right) .$$

**1**)- حدد معيار و عمدة للعدد العقدي $a$ .

**2**)- بين أن المعادلة : $f(z)=z$ تقبل حلا وحيدا $\omega$ ينبغي تحديده .

**3**)- في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط :

$I(\omega)$ و $M(z)$ و $M'\left(f(z)\right)$ و نفترض أن $z\neq\omega$ .

أ- أعط قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}\right)$ ، ثم أحسب المسافة $IM'$ بدلالة $IM$ .

ب- لتكن $A_0$ النقطة ذات اللحق $z_0=-1+2i$ .

و نعتبر المتتالية $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N});z_{n+1}=f\left(z_n\right)$ .

⇦ عبر عن المسافة $IA_n$ بدلالة $n$ (حيث $A_n$ هي النقطة ذات اللحق $z_n$) ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} IA_n$ .

■ **التمرين رقم 02:**

**1**)- بين أنه : $(\forall z\in\mathbb{C});|1+z|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|1+z^2\right|>1$ .

**2**)- بين أن : $\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2;\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2=2\left(|z|^2+\left|z'\right|^2\right)$ .

**3**)- بين أن : $\forall\left(z,z'\right)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^2;\left|z+z'\right|=|z|+\left|z'\right|\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\arg\left(z'\right)[2\pi]$ .

**4**)- بين أن : $\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2;\left(|z|+\left|z'\right|\right)\leq\left|z+z'\right|+\left|z-z'\right|$ ، متى يتحقق التساوي ؟

**5**)- بين أن : $\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2;\left|z+z'\right|^2\leq\left(1+|z|^2\right)\left(1+\left|z'\right|^2\right)$ ، متى يتحقق التساوي ؟

■ **التمرين رقم 03:**

ليكن $z\in\mathbb{C}$ ، و نعتبر في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التوالي هي $z$ و $z^2$ و $z^3$ .

⇦ حدد الأعداد العقدية $z$ التي لأجلها تكون النقطة $O$ أصل المعلم هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث $ABC$ .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .