Lycée Moussa Bno Noussaer - Khémisset	Devoir surveillé n°1 1er tranche 2016/2017	1er Bac Sc Mat Int Prof:Abdellah Belkhatir Durée: 2 heures 30 min

❖ Exercice n° 1:

1,5 ✓ montrer que la proposition suivante est fausse:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 2^n + 3^n \text{ est un nombre premier .}$$

❖ Exercice n° 2:

On travaille avec l'ensemble $E = \{0,1,4,7\}$ et on considère les deux Propositions suivantes:

$$p : (\forall x \in E)(\exists y \in E), x < y \text{ et } q : (\exists x \in E)(\forall y \in E), y \leq x$$

1 ✓ La proposition p est-elle vraie? même question pour q.

0,5 Voyez-vous un lien entre p et q?

❖ Exercice n° 3:

1 1)- Soient x et y deux nombres réels positifs, montrer que:

$$(x \neq 1 \text{ ou } y \neq 1) \Rightarrow x + y + 2 \neq 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right).$$

1 2)- Soient a,b,c et d quatre nombres réels, l'implication suivante:

$$(a \neq b \text{ et } c \neq d) \Rightarrow a + c \neq b + d$$

Est-elle vraie ou fausse? justifier votre réponse.

❖ Exercice n° 4:

Soient a,b,c trois nombres réels tels que:

$$abc = 1 \text{ et } a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1,5 ✓ Montrer qu'au moins un des nombres réels a,b,c est égal à 1.

❖ Exercice n° 5:

Soient a,b,c trois nombres réels strictement positifs tels que:

$$(i) : abc > 1 \text{ et } (ii) : a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

✓ A l'aide d'un raisonnement par l'absurde montrer:

1 1)- qu'aucun des nombres réels a,b,c ne peut être égal à 1.

1 2)- qu'au moins un des réels a,b,c est strictement supérieur à 1 .

1 3)- qu'au moins un des réels a,b,c est strictement inférieur à 1 .

1 ✓ Donner un exemple numérique de triplet (a,b,c) vérifiant Les inégalités (i) et (ii).

❖ Exercice n° 6:

✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante:

1,5 $$(E) : \cos(2x) + \sin(7x) = -2.$$

❖ Exercice n° 7:

2 ✓ Trouver tous les couples (x, y) de nombres réels, solutions du Système suivant: $(S):\begin{cases}|x|+2y=6\\ 2|x-1|-y=4\end{cases}$.

❖ Exercice n° 8:

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose:

$$S_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)}$$

0,75 1)- Donner S_1, S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles.

1 2)- Montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*), S_n=\dfrac{n}{2n+1}$.

❖ Exercice n° 9:

1)- Soient a,b,c des nombres réels quelconques.

0,75 a)- Montrer que: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

0,75 b)- En déduire que: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$.

2)- Montrer que quelque soient les nombres réels a,b,c et x,y,z

0,75 On a: $(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)\times(x^2+y^2+z^2)$.

3)- Soient x,y et z des nombres réels positifs tel que: $x+y+z=1$.

0,75 a)- Montrer que: $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\leq\sqrt{xy+yz+zx}$ (utiliser 2)).

0,75 b)- En déduire que: $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

➢ Exercices bonus:

❖ Exercice n° 1:

2 ✓ Montrer qu'ils n'existent pas d'entiers naturels a,b et c tel que:

$$(E): a^2+b^2-8c=6.$$

❖ Exercice n° 2:

2 ✓ Trouver la valeur minimale de l'expression $A=\sqrt{x+y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$

Ou x et y sont deux nombres réels strictement positifs.

❖ Exercice n° 3:

Soient a_1, a_2 .... et a_n des nombres réels strictement positifs

Vérifiant: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2^{n^2+n}}$ avec $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

2 ✓ Montrer que: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+2^{2k}a_k\right)\geq 2^n$, dans quel cas a-t-on l'égalité?

❖ Exercice n° 4:

2 ✓ Montrer que:

$$\left(\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right), \frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\leq\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$