الاشتقاق وتطبيقاته

أهداف الدرس

- تعرف العدد المشتق و الدالة المشتقة
- تعرف الكتابة التفاضلية
- تعرف مشتقة مركب دالتين

- تعرف مشتقة الدالة العكسية لدالة
- تحديد مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$
- تحديد مشتقة الدالة $x \mapsto (u(x))^r$

القدرات المنتظرة

- حساب مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة دالتها المشتقة
- تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال .

- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية
- استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية على مجال

الامتدادات

- المتتاليات العددية
- الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية
- العلوم الاقتصادية.

- الحساب التكاملي
- الإحصاء و الاحتمالات
- العلوم الفيزيائية و علوم الحياة و الأرض
- الجغرافيا

فقرات الدرس

- تذكير و إضافات
  - معادلة المماس
  - الدالة التآلفية المماسة
- العمليات على الدوال المشتقة
- مشتقة مركب دالتين

- مشتقة الدالة العكسية
  - مشتقة $\sqrt[n]{x}$ و x^r
  - مشتقة $\sqrt[n]{u(x)}$ و $(u(x))^r$

I)- تذكير و إضافات

1)- العدد المشتق – الدالة المشتقة Nombre dérive – Fonction dérivée

تعاريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و يرمز له بالرمز $f'(x_0)$.
- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
- الدالة $f' : x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I .

ملاحظة

بوضع : $h = x - x_0$ لدينا: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}$

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإنها متصلة في x_0 .

ملاحظة

- عكس الخاصية السابقة غير صحيح. (الدالة $f : x \mapsto |x|$ متصلة و غير قابلة للاشتقاق في 0).
- إذا كانت f غير متصلة في x_0 ، فإنها غير قابلة للاشتقاق في x_0 .

2)- معادلة المماس لمنحنى دالة – الدالة التآلفية المماسة لدالة

خاصية1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 فإن منحنى الدالة f يقبل مماسا (T) في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ ، معادلته: $(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

مثــال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

- أحسب $f'(0)$ ثم حدد معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها صفر.

ملاحظة

إذا انعدمت f' في x_0 فإن (C_f) يقبل مماسا أفقيا (T) في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معادلته هي :

$(T) : y = f(x_0)$.

خاصية2

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين (أو على اليسار) فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه هو $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$).

خاصية3

إذا كانت f دالة متصلة في x_0 و $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي في النقطة $A(x_0, f(x_0))$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x-\sqrt[3]{x^2-x}$.

1) – تحقق من أن $D_f=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

2) – أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار و في 1 على اليمين ثم أول النتيجتين هندسيا .

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0.

- الدالة $x\mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0.
- لدينا: $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و هو التقريب التآلفي ل $f(x)$ بجوار x_0.
- لدينا: $f(x_0+h)\approx f'(x_0)h+f(x_0)$ و هو التقريب التآلفي ل $f(x_0+h)$ بجوار الصفر.

تمرين: التقريب المحلي لدالة بجوار x_0

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1) – حدد التقريب التآلفي للدالة f بجوار العدد 1.

2) – استنتج قيمة مقربة لكل من $\frac{1}{\sqrt{0.999}}$ و $\frac{1}{\sqrt{1.002}}$.

3)- جدول الدوال المشقة لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	مجموعة تعريف f	الدالة f'	f قابلة للاشتقاق على المجال
$x\mapsto a,(a\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto 0$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto 1$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto x^n,n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x\mapsto\sin x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto\cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto\cos x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$	$x\mapsto 1+\tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,k\in\mathbb{Z}$

تمرين: النهايات و العدد المشتق

أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$ و $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

3)- الكتابة التفاضلية Ecriture différentielle

إذا كان $y=f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I فإننا نكتب اصطلاحا:
$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)=\frac{\partial y}{\partial x}$ أو $dy=f'(x)dx$ وهذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية.

II)- العمليات على الدوال المشتقة

خاصية

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I، و $\lambda\in\mathbb{R}$ فإن:الدوال $f+g$ و λf و fg، دوال قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $(f+g)'=f'+g'$ و $(\lambda f)'=\lambda f'$ و $(fg)'=f'g+fg'$.
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I، و g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان قابلتان للاشتقاق على I ، و لدينا: $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

نتائج

- كل حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

III)- مشتقة مركب دالتين Dérivée de la composée de deux fonctions

خاصية

لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث: $f(I)\subset J$. و ليكن $x_0\in I$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ ، فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا : $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)g'(f(x_0))$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$، فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x\in I,(g\circ f)'(x)=f'(x)g'(f(x))$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\cos(1+x^2)$.
لدينا: الدالة $u:x\mapsto 1+x^2$ قابلة للاشتقاق على المجال $I=\mathbb{R}$.
و لدينا: الدالة $v:x\mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على المجال $J=\mathbb{R}$.
و بما أن $f=v\circ u$ و $u(\mathbb{R})\subset J=\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2x\sin(1+x^2)$.

نتائج

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f^n قابلة للاشتقاق على I : $\forall n\in\mathbb{N}^*,(f^n)'=nf'f^{n-1}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I : $(\sqrt{f})'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

IV- مشتقة الدالة العكسية Dérivée de la fonction réciproque

خاصية1

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I ضمن $\mathbb{R}$ ، و $x_0 \in I$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x \in I, f'(x) \neq 0)$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا: $\forall y \in f(I) : (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.

نتائج: مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و مشتقة الدالة $x \mapsto x^r$.

- الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.
- الدالة $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^*)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, (x^r)' = rx^{r-1}$.

مثال1

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$.

الدالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

(مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$). و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + x^{\frac{2}{3}}$.

الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. (لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$). و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

خاصية2

- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ ، $(n \in \mathbb{N}^*)$ قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, (\sqrt[n]{u(x)})' = \dfrac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$.
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto (u(x))^r$ ، $(r \in \mathbb{Q}^*)$ قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, ((u(x))^r)' = ru'(x)(u(x))^{r-1}$.

مثال1

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=x-\sqrt[3]{x^2-x}$.

لدينا : الدالة f معرفة على $D_f=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

الدالة $x\mapsto x^2-x$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

إذن f قابلة للاشتقاق على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا:

$$\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,f'(x)=1-\frac{(x^2-x)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2-x}\right)^2}=1-\frac{2x-1}{3\left(\sqrt[3]{x^2-x}\right)^2}.$$

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$.

لدينا : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

الدالة $x\mapsto x^2-1$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ،

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ولدينا:

$$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[: f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)'(x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{4}{3}x(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)}}$$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

1) – بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

2) – أحسب $f(0)$ ثم بين أن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و احسب $(f^{-1})'(1)$.