ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 01 الدورة الثانية 2016/2015	2 بكالوريا علوم رياضية مدة الإنجاز : أربع ساعات ذ : عبدالله بن لختير

❖ تمرين رقم 01: (02 نقط)

1)- ليكن $a \in \mathbb{N}^*$ بحيث : $a \wedge 10 = 1$.

أ- بين أن : $a^4 \equiv 1[10]$. — 0,5

ب- إستنتج أن : $a^{40} \equiv 1[100]$. — 0,5

2)- حدد رقمي وحدات و عشرات كل من العددين $N_1 = 3^{2013}$ و $N_2 = 67^{42}$. — 1

❖ تمرين رقم 02: (03 نقط)

⇦ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة : $(E):13x-19y=11$.

1)- أ- بدون حل المعادلة (E) تحقق أن مجموعة حلولها غير فارغة . — 0,25

ب- باستعمال خوارزمية أقليدس أوجد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم إستنتج مجموعة حلولها مبرزا مراحل الحل . — 0,75

2)- ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

أ- حدد قيم $d = x \wedge y$ الممكنة معللا جوابك . — 0,25

ب- حدد الحلول (x,y) للمعادلة (E) التي تحقق : $x \wedge y = 1$. — 0,5

3)- أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(F):(n+1)^{13} \equiv -6[13]$ (يمكنك إستعمال مبرهنة فيرما) . — 0,5

ب- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}(n+1)^{13} \equiv -6[13] \\ (n+1)^{19} \equiv 5[19]\end{cases}$. — 0,75

❖ تمرين رقم03: (04 نقط)

⇦ ليكن a من $\mathbb{N}^*$ و ليكن $p \geq 5$ عددا أوليا بحيث : p / a^2+a+1 .

1)- أ- بين أن : $a^3 \equiv 1[p]$. — 0,25

ب- بين أن : $(a-1) \wedge p = 1$ و $(a+1) \wedge p = 1$. — 0,75

ج- إستنتج أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم k يحقق : $a^k \equiv 1[p]$. — 0,75

د- بين أن : $p \equiv 1[3]$ (يمكنك تطبيق مبرهنة فيرما) . — 0,75

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، A_n يقبل قاسما أوليا p_n بحيث : $p_n > n$ و $p_n \equiv 1[3]$. — 0,75

ب- إستنتج أنه توجد ما لانهاية من الأعداد الأولية الموجبة التي تكتب على شكل $3k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$. — 0,75

❖ تمرين رقم 04: (11 نقطة)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي : **6 pts**

$$\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right);\ f(x)=\frac{\ln x}{x-1} \quad \text{و} \quad f(1)=1 .$$

1)- أ- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^{*+}$. **0,5**

ب- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي . **1**

2)- ليكن t عنصرا من المجال $]-1,+\infty[$.

أ- بين أن : $\left|\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du\right|\le t^2\left|\ln(1+t)\right|$. **0,75**

ب- بين أن : $\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du=\ln(1+t)-t+\frac{1}{2}t^2$. **0,75**

ج- إستنتج أن f قابلة للإشتقاق في $x_0=1$ و أن $f'(1)=\frac{-1}{2}$. **0,75**

3)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}-\{1\}\right);\ f'(x)=\dfrac{\frac{(x-1)}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$. **0,5**

ب- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}-\{1\}\right);\ln x>\frac{x-1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f . **0,75**

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (مبرزا المماس (T) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=1$) . **0,75**

5)- بين أن : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}-\{1\}\right);\ f\left(\frac{1}{t}\right)=tf(t)$. **0,25**

II- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : **5 pts**

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad \text{و} \quad F(0)=0 .$$

1)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right);\ \frac{2x}{x+1}.\ln x\le F(x)\le x\ln x$. **0,5**

ب- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{F(x)}{x}$ ، ثم أعط التأويل الهندسي لكل واحدة منهما . **1**

2)- أ- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. **0,25**

ب- بين أن : $\left(\forall u\in]0,1[\right);F\left(\frac{1}{u}\right)=-\int_u^{u^2}\frac{f(t)}{t}dt$ (يمكنك إستعمال مكاملة بتغيير المتغير) . **0,75**

ج- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$ (يمكنك وضع : $u=\frac{1}{x}$ و إستعمال مبرهنة المتوسط) . **0,75**

3)- نضع : $G(x)=\int_1^x f(t)dt$ ، حيث $x\in\mathbb{R}^{*+}$.	
أ- عبر عن $F(x)$ بدلالة $G(x)$ و $G(x^2)$ لكل $x\in\mathbb{R}^{*+}$.	0,25
ب- إستنتج تغيرات F على $\mathbb{R}^{*+}$ وحدد رتابتها على كل من المجالين $\left]0,\frac{1}{3}\right]$ و $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$.	0,75
4)- أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نعطي : $F\left(\frac{1}{3}\right)\simeq -0,4$) .	0,75

❖ تمرين إضافي رقم 01:

✓ حدد في نظمة العد العشري رقم وحدات العدد : $N=4444^{4444}$.

❖ تمرين إضافي رقم 02:

✓ حل في $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^2$ ، ثم في $\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\right)^2$ النظمة : $(S):\begin{cases}\bar{7}x+\bar{5}y=\bar{2}\\ \bar{5}x+\bar{4}y=\bar{7}\end{cases}$.

❖ تمرين إضافي رقم 03:

✓ نضع : $N=\underbrace{\overline{111111111}^{(10)}}_{9\ fois}$ ، بين أن : $N^2=12345678987654321$.

❖ تمرين إضافي رقم 04:

⇦ ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا و a عددا نسبيا لا يقبل القسمة على p .

✓ بين أن : $(\forall k\in\mathbb{N});a^{(p-1)p^k}\equiv 1\left[p^{k+1}\right]$.

❖ تمرين إضافي رقم 05:

⇦ ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $a\wedge b=1$.

✓ بين أن : $\sqrt{\frac{a}{b}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\left(\exists(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right);\begin{cases}a=\alpha^2\\ b=\beta^2\end{cases}$.

❖ تمرين إضافي رقم 06:

⇦ ليكن $(a,b)\in\left(\mathbb{Z}^*\right)^2$ بحيث : $a\wedge b=1$ و $d\in\mathbb{N}^*$.

✓ بين أن : $d/ab\Leftrightarrow\left(\exists!(d_1,d_2)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right);\begin{cases}d_1/a\\ d_2/b\\ d=d_1d_2\end{cases}$.

إنتهى الموضوع .