المادة : الرياضيات	إ متحان تجريبي للسنة الثانية باكالوريا رقم 3	المعامل : 9
الأستاذ : علي الشريف	الشعبة : العلوم الرياضية (أ - ب) ثانوية المختار السوسي نيابة الخميسات	مدة الإنجاز : 4 ساعات

آضبط ساعتك و أنجز هذا الإمتحان في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع آحترام ضوابط و طقوس الإمتحان

التمرين الأول : (2ن)

1) أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n العدد: $(n^2+1)\wedge(n+1)$

ب- بين أن العدد : (n^2+1) ليس مربعا كاملا مهما يكن n من IN^* .

2) لتكن a و b و n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث: $a\wedge b=1$ و $a(n^2+1)=b^2(n+1)$

أ- بين أن: $a\wedge b^2=1$ ثم أن : $a\le n$ و $b\le n$.

ب- بين أن $(n^2+1)\wedge(n+1)=2$.

ج- نضع: $n^2+1=2p$ و $n+1=2q$ بحيث : $(p,q)\in IN^*\times IN^*$ و $p\wedge q=1$.

بين أن $a=q$ و $b^2=p$.

د- نفترض أن: $b=a+1$ أحسب الأعداد a و b و n.

التمرين الثاني : (3ن)

المستوى العقدي منسوب إ لى م.م.م $(O,\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر المعادلة : $(E):z^2-2.z+\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}=0$ حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

1) أ – حل في C المعادلة (E).

ب – ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) حيث : $\mathrm{Im}(z_1)=\tan(\theta)$

أ كتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) لتكن M_1 و M_2 على التوالي صورتي z_1 و z_2 في المستوى العقدي .بين أ ن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين رأ سه O

3) ليكن $n\in IN^*$.نعتبر المعادلة : $(E_1):z^{2.n}-2.z^n+\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}=0$

حدد حلول المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي .

التمرين الثالث : (3ن)

$M_2(IR)$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ و $k=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

1) لتكن في $M_2(IR)$ المجموعة : $E=\{M\in M_2(IR)/\exists(a,b,c)\in IR^3, M=aI+bJ+cK\}$

أ) بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب) بين أن $B=(I,J,K)$ أساس ل E.

2) لتكن المجموعة : $F=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&2\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}/(\alpha,\beta)\in IR^2 \text{ و } \alpha^2-2\beta^2=1\right\}$

أ) تحقق أن $F\subset E$.

ب) بين أن F مستقر بالنسبة للضرب في $M_2(IR)$. ثم بين أن: (F,x) زمرة تبادلية .

3) لتكن المجموعة : $G=\{(\alpha,\beta)\in IR^2/\alpha^2-2\beta^2=1\}$ نعرف في IR^3 قانون التركيب الداخلي * ب :

$$(\alpha,\beta)*(\alpha',\beta')=(\alpha\alpha'+2\beta\beta',\beta\alpha'+\alpha\beta')$$

أ) تحقق أن G جزء مستقر من $(IR^2,*)$.

$\varphi : G \to F$

ب) نعتبر التطبيق : $(\alpha,\beta) \to \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو (F,x) و استنتج بنية $(G,*)$.

ج) لتكن المصفوفة $M\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ من $M_2(IR)$. - تحقق أن : $M \in F$

- بين بالترجح أن $\forall n \in IN^* \quad : \quad M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2} & \dfrac{(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}$

د) حدد $(3,2)^n$ حيث : $(3,2)^n = \underbrace{(3,2)*(3,2)*.....*(3,2)}_{n \text{ fois}}$ $(n \in IN^*)$

التمرين الرابع : (4ن)

I) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

1) أنشر $(1+x)^n$ لكل x من *IR . ثم استنتج أن: $\sum_{\substack{p\in 2N \\ 0\le p\le n}} C_n^p = 2^{n-1}$, $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

2) يحتوي صندوق على عدد من الكرات مرقمة من0 إلى n .لا يمكن التمييز بينها باللمس و لكل k منIN بحيث $0 \le k \le n$ توجد C_n^k كرة تحمل الرقم k.

أ- ماهو عدد الكرات الموجودة في الصندوق؟

ب- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق .ماهو الإحتمال لكي لاتحمل الكرة المسحوبة رقما زوجيا؟

II) نعتبر فيما يلي أن الصندوق لم يعد يحتوي إلا على2n كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس.منهاn كرة بيضاء و n كرة سوداء. نسحب عشوائيا و في آن واحد n كرة من هذا الصندوق.

1) ليكن p من IN بحيث $0 \le p \le n$.

ماهو الإحتمال لكي يحتوي السحب على p كرة سوداء؟

2) استنتج المجموع:. $\sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p\right)^2$

مسألة : (8ن)

الجزءالأول :

لتكن الدالة العدديةg المعرفة على IR بمايلي : $\begin{cases} g(x) = x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1| \;;x \in IR^*-\{1\} \\ g(0)=g(1)=0 \end{cases}$

1) بين أن: $(\Delta): x=\dfrac{1}{2}$ محور تماثل بالنسبة ل (C_g) . (لدراسة g نقتصر إذن على $D_E=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$)

2) أدرس اتصال و اشتقاق الدالة g في النقطة $x_0=1$.

3) أ) بين أن : $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-1$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_g) ؟

4) أ) تحقق أن : $\forall x \in D_E-\{1\} \;:\; g'(x)=\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)$

ب) إشارة$g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g على IR.

5) أ) حدد معادلة المماس (T) ل $\left(C_g\right)$ في $x_1 = 2$.

ب) أنشيء (T) و $\left(C_g\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. $\left(\ln 2 \approx 0,7\right)$

6) ماهي إشارة $g\left(x\right)$ ؟

7) لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0,1[$ ب : $G\left(x\right) = -x + x^2 \ln x - \left(x-1\right)^2 \ln\left(1-x\right)$

أ) أحسب $G'(x)$ لكل x من $]0,1[$.

ب) استنتج حساب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحصور بين $\left(C_g\right)$ و (Ox) والمستقيمين المحددين بالمعادلتين ($x = \lambda$ و $x = 1-\lambda$ (حيث $\frac{1}{2} \langle \lambda \langle 1$) .

ت) أحسب $\lim\limits_{\lambda \to 1^-} A(\lambda)$.

الجزءالثاني :

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $R - \{-1,1\}$ بمايلي :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = \dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} & \forall x \in IR^* - \{-1,1\} \\ f\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

وليكن (Γ) منحناها في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب اتصال و اشتقاق f في الصفر .

2) أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها.

3) أ) بين أن : $\forall x \in IR^* - \{-1,1\} \ : \ f'\left(x\right) = \dfrac{g\left(x\right)}{x\left(x-1\right)\left(\ln|x|\right)^2}$

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) حدد تقاطع المنحنى (Γ) مع الأفاصيل (ox) .

ب) أحسب $f(-2)$ أنشئ (Γ) في المعلم السابق $\ln 3 \approx 1,1$.